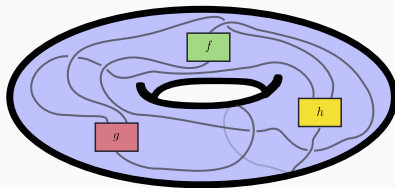


Construction combinatoire d'associateurs en genre supérieur

Adrien Brochier
Séminaire ART Strasbourg



10 février 2026

- On fixe un corps k de caractéristique 0. Soit \mathbf{fB} la catégorie des tresses¹ dont:
 - les objets sont les suites finies de •
 - les morphismes sont les combinaisons k -linéaires de tresses.
- C'est une catégorie monoidale tressée balancée (BBMC), et c'est en fait l'exemple universel:

Propriété universelle

Pour toute BBMC \mathcal{A} , et tout objet $V \in \mathcal{A}$, il existe un unique foncteur de BBMC

$$\mathbf{fB} \longrightarrow \mathcal{A}$$

qui envoie • sur V .

¹les tresses seront toujours équipées d'une parallélisation ("framing")

Complétion pro-unipotente

- On définit $\widehat{\mathbf{fB}}$ comme la complétion de \mathbf{fB} relative à l'idéal engendré par

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} .$$

- Elle est universelle pour les BBMC "quantiques", celles obtenues par déformation d'une catégorie symétrique:

$$\beta_{V,U}\beta_{U,V} = \text{Id}_{U \otimes V} + \hbar t_{U,V} + O(\hbar^2) \quad \theta_U = \text{Id}_U + \hbar C_U + O(\hbar^2)$$

où \hbar est une variable formelle.

- Cette complétion est aussi naturelle du point de vue des invariants de type finis au sens de Vassiliev, et du point de vue de l'homotopie rationnelle au sens de Quillen et Sullivan.
- Les endomorphismes naturels t, C satisfont des versions infinitésimales des axiomes des BBMC: catégorie de Casimir.

Associateurs

- On note **fCD** la catégorie de Casimir universelle.
- Elle a les mêmes objets que **fB**, et ses morphismes sont des combinaisons linéaires de *diagrammes de cordes*



On note $\widehat{\mathbf{fCD}}$ la complétion relative au degré.

- Un associateur est une série formelle $\Phi \in \text{End}_{\widehat{\mathbf{fCD}}}(\bullet \bullet \bullet)$ qui satisfait des équations algébriques modelées sur les axiomes de catégorie monoidale tressée.
- Pour tout choix d'un associateur Φ on obtient ainsi une BBMC $\widehat{\mathbf{fCD}}^\Phi$ (la catégorie sous-jacente n'a pas changée).

Théorème (Drinfeld)

1. *Les associateurs existent.*
2. *Le foncteur*

$$\widehat{\mathbf{fB}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{fCD}}^\Phi$$

induit par propriété universelle est un isomorphisme filtré.

- Plus généralement on a une équivalence entre les BBMC quantiques et les catégories de Casimir.
- Construction combinatoire de l'invariant de Vassiliev–Kontsevich des entrelacs.
- En passant aux chaînes rationnelles, on obtient un isomorphisme de formalité pour l'opérade des petits disques: c'est l'ingrédient essentiel de tous les théorèmes difficiles d'existence en quantification par déformation (Kontsevich, Tamarkin, Etingof–Kazhdan, ...)
- L'existence des associateurs est prouvé via la monodromie des équations KZ en CFT: relations algébriques entre les nombres multizeta.
- Si G est un groupe réductif complexe, on a une structure de Casimir sur $\text{Rep } G$ et


Théorème (Kohno, Drinfeld)

On a une équivalence de BBMC

$$\text{Rep}_q G \simeq \text{Rep}_\phi G$$

où le membre de gauche est la catégorie des représentations du groupe quantique associé à G , pour $q = \exp(\hbar)$.

Extension aux surfaces

- Soit S une surface compacte et orientée. On note $\mathbf{fB}(S)$ la catégorie dont
 - les objets sont les configurations de points sur S
 - les morphismes sont les combinaisons linéaires de tresses dans $S \times I$.
- Deux filtrations naturelles:
 - la filtration de Vassiliev, relative à l'idéal engendré par 
 - la filtration unipotente, obtenue en y ajoutant $\gamma - 1$ pour toute boucle γ basé en un point vue comme une tresse à un brin.
- On note $\widehat{\mathbf{fB}}(S)$ la complétion relative à la seconde.

Théorème

Pour tout choix d'un associateur, il existe une équivalence de catégories

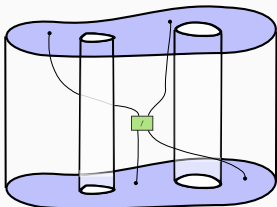
$$\widehat{\mathbf{fB}}(S) \simeq \widehat{\mathbf{fSCD}}(S)$$

donnée par des formules explicites, où $\widehat{\mathbf{fSCD}}(S)$ a comme morphismes des diagrammes avec un brin distingué, sur lequel les extrémités des cordes sont décorées par des éléments de $H_1(S)$:



Catégories d'écheveaux

- Plus généralement, à toute BBMC \mathcal{A} on associe la catégorie d'écheveaux ("skein") $\int_S \mathcal{A}$ dont:
 - les objets sont les configurations de points sur S décorés par des objets de \mathcal{A}
 - les morphismes des combinaisons linéaires de graphes plongés (Morse-ment) dans $S \times I$ dont les sommets sont décorés par des morphismes de \mathcal{A}



- toute portion de diagramme à l'intérieur d'un cube plongé rectilinéairement dans $S \times I$ peut être interprété comme un morphisme dans \mathcal{A} , et on quotiente par les relations qui sont satisfaites dans \mathcal{A} .
- Dû à l'origine à Walker et Yetter, cas particulier/ancêtre de l'homologie de factorisation.
- Tout $V \in \mathcal{A}$ induit un foncteur $\mathbf{fB}(S) \rightarrow \int_S \mathcal{A}$
- Cette construction est fonctorielle pour les plongements (lisses, orientés).

- Le choix d'une collection de points base le long de la droite horizontale dans le disque D^2 donne une équivalence

$$\mathcal{A} \simeq \int_{D^2} \mathcal{A}.$$

et la structure monoidale tressée de \mathcal{A} vient d'un plongement $D^2 \sqcup D^2 \hookrightarrow D^2$.

- Si P est une 1-variété compacte orientée,

$$\int_P \mathcal{A} := \int_{P \times I} \mathcal{A}$$

est monoidale, avec produit induit par plongement le long de I .

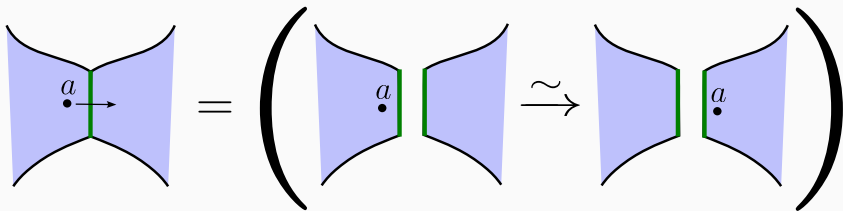
- Un plongement $P \hookrightarrow \partial S$ munit $\int_S \mathcal{A}$ d'une structure de $\int_P \mathcal{A}$ -module.
- Les $\int_{S^1} \mathcal{A}$ -modules sont les \mathcal{A} -module tressés d'Enriquez. Ce sont aussi les \mathcal{A} -modules opéradiques, ou les "point defects" dans le langage des TFTs.

Théorème (Walker, Yetter, Lurie, Ayala–Francis, . . .)

Si S' est obtenue à partir de S en recollant deux copies de P , alors

$$\int_{S'} \mathcal{A} \simeq \mathrm{HH}_0 \left(\int_P \mathcal{A}, \int_S \mathcal{A} \right)$$

où HH_0 est une catégorification de la trace $M/[A, M]$ d'un bimodule sur une algèbre associative.



- On obtient de cette façon une équivalence

$$\int_S \widehat{\mathbf{fB}} \simeq \int_S \widehat{\mathbf{fCD}}^\Phi.$$

- Ça n'est pas celle qu'on veut !

- Le membre de gauche est la complétion rel. la filtration de Vassiliev, et on sait qu'on n'a pas d'analogues des associateurs dans ce cas (Bellingeri–Funar).
- De fait, le membre de droite est compliqué: les morphismes peuvent, au moins si $\partial S \neq \emptyset$ s'écrire comme des combinaisons linéaires d'un certain type de diagrammes, **mais la composition dépend de Φ** .
- On montre qu'on n'a plus ce problème si on considère la complétion pro-unipotente.

Schéma de preuve

- On introduit une notion de bimodule tressé infinitésimal sur une catégorie de Casimir \mathcal{I} .
- Le choix d'un associateur donne une quantification de ces objets, des bimodules tressés sur \mathcal{I}^Φ .
- Cette quantification commute avec une version infinitésimale de la trace.
- La structure tressée est essentielle: elle joue un rôle même quand on recolle le long d'intervalles, çàd quand on regarde ces objets seulement comme des \mathcal{I}^Φ -bimodules.
- Une conséquence est qu'on ne peut *pas* se ramener au cas du disque par excision, mais on peut se ramener au disque épointé (il faut que les intervalles soient sur des composantes de bord distinctes).
- Le résultat qu'on veut est bien connu dans ce cas.
- On conclut en montrant qu'on obtient bien les catégories de diagrammes qu'on veut, à partir de $\widehat{\text{fSCD}}(S^1 \times I)$, par application répétée de ces traces infinitésimales.

- Soit G un groupe réductif et soit

$$\mathrm{Ch}_G(S) := \{\pi_1(S) \longrightarrow G\}/G$$

la variété² des caractères de S .

Théorème (Ben-Zvi–Francis–Nadler, Stefanich)

$\int_S \mathrm{Rep} G$ s'identifie canoniquement à la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur $\mathrm{Ch}_G(S)$.

- Ces variétés ont une structure de Poisson canonique (Atiyah–Bott, Goldman, Fock–Rosly, Alekseev–Malkin–Meinrenken, ...)
- Les catégories $\int_S \mathcal{A}$ pour

$$\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_\phi G \simeq \mathrm{Rep}_q G$$

en fournissent des quantifications canoniques.

- Passer à la version pro-unipotente revient à considérer le voisinage formel de la représentation triviale.

²dans ce contexte on a plutôt besoin du champ correspondant

- Si $S = S_{\mathfrak{g}, n+2}$, le formalisme d'AMM montre que ce voisinage est Poisson isomorphe à

$$((T^*\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \times (\mathfrak{g}^*)^{n+1}) / G$$

via une construction qu'ils appellent "exponentiation" d'une variété Hamiltonienne.

- On a une quantification "évidente" de ces variétés, sans utiliser d'associateurs:

$$D(\mathfrak{g})^{\otimes \mathfrak{g}} \otimes U(\mathfrak{g})^{\otimes n+1} \text{-mod}_G .$$

où $D(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Weyl.

- Le cas des variétés fermées s'en déduit par réduction Hamiltonienne.
- Les catégories de diagrammes $\widehat{\mathbf{fSCD}}(S)$ sont des versions universelles de cette construction.
- Le principal ingrédient technique de ma construction est essentiellement une quantification de l'exponentiation d'AMM.

Remarques finales

- On peut penser à cette opération comme à une version combinatoire/limite de la correspondance de Riemann–Hilbert.
- Dans le cas du tore on retrouve une formule due à Calaque–Enriquez–Etingof obtenue à partir de la monodromie des équations KZB sur une courbe elliptique E_τ , en passant à la limite $\tau \rightarrow i\infty$.
- Combiné a des résultats en commun avec Ben-Zvi–Jordan: calcul de la monodromie de ces équations via les groupes quantiques.
- On devrait retrouver les modèles combinatoires de Campos–Idrissi–Willwacher pour les chaînes rationnelles sur les espaces de configuration des surfaces vus comme modules sur l’opérateur des petits disques.
- Des représentations similaires des catégories de tresses peuvent en principe être obtenues via le foncteur LMO de Cheptea–Habiro–Massuyeau, mais c’est une construction beaucoup plus compliquée, et la catégorie cible est plus grosse (en particulier cette construction ne donne une équivalence qu’après être passé aux enchevêtrements).
- Les deux constructions devraient être reliés par une sorte d’isomorphisme de Duflo (voir Katz dans le cas du tore).

Merci pour votre attention !