

Université de Caen-Basse Normandie
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
CNRS UMR 6139

Produits tensoriels de représentations irréductibles de $GL(E)$ et coefficients de Littlewood-Richardson

Adrien Brochier

Mémoire de stage de Master 2 (Mathématiques fondamentales)

Sous la direction de **Bernard Leclerc**

Année universitaire 2006–2007

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll
uns niemand vertreiben können.

David Hilbert

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Bernard Leclerc, qui a été un directeur de stage attentif et sympathique, et qui m'a proposé un sujet d'une grande élégance.

Je remercie également Jean-Paul, pour les échanges que nous avons eu à propos de nos sujets de stage respectifs.

Enfin, je remercie naturellement mes amis, parents, frère et soeurs pour leurs conseils et leur soutien. Je remercie tout particulièrement Maëlen pour son aide extrêmement précieuse.

Introduction	9
1 Représentations polynomiales de $GL(E)$	11
1.1 Rappels sur la théorie des représentations	11
1.1.1 Représentations linéaires des groupes	11
1.1.2 Somme directe, produit tensoriel	12
1.1.3 Représentations de $GL(E)$	13
1.2 Modules de Schur	14
1.2.1 Partitions et tableaux	14
1.2.2 Un problème universel	15
1.2.3 Construction des modules de Schur	16
1.3 Caractérisation des représentations irréductibles	20
1.4 Caractères, polynômes de Schur	21
1.5 Énoncé du problème	21
1.6 Exemple	21
1.6.1 Représentation de $GL_2(\mathbb{C})$ associée à $(3, 1)$	21
1.6.2 Représentation de $GL_3(\mathbb{C})$ associée à $(2, 1)$	23
2 Combinatoire des tableaux	25
2.1 Le monoïde plaxique	25
2.1.1 Mots de tableaux	25
2.1.2 Insertion d'un mot dans un tableau	26
2.1.3 Relation de Knuth	26
2.1.4 Monoïde plaxique	27
2.2 Correspondance de Robinson Schensted Knuth	27
2.2.1 Inversion de l'algorithme de Schensted	27
2.2.2 Correspondances	29
2.3 Tableaux gauches et jeu de taquin	29

Table des matières

3 Règle de Littlewood-Richardson	31
3.1 Analogie plaxique des polynômes de Schur	31
3.2 Démonstration de la règle de LR	32
3.3 Tableaux de Littlewood-Richardson	34
3.4 Exemple	35
4 Coefficients de LR et polytopes convexes	37
4.1 Triangles de Littlewood-Richardson	38
4.2 Triangles de Berenstein-Zelevinsky	39
4.3 Ruches	43
4.4 Conjecture de saturation	44
Bibliographie	48

Le but de ce rapport est d'introduire les coefficients de Littlewood-Richardson, et la règle du même nom qui permet de les calculer. Ces coefficients apparaissent de manière naturelle dans de nombreux domaines. L'un d'entre eux est la théorie des représentations linéaires des groupes $GL(E)$. Les coefficients de Littlewood-Richardson y apparaissent comme les multiplicités des produits tensoriels de représentations irréductibles. Dans le premier chapitre, nous donnerons une construction des représentations polynomiales irréductibles de $GL(E)$. Nous introduirons à cet effet les *tableaux de Young*, qui ne seront dans un premier temps qu'une notation pratique pour désigner les polynômes compliqués qui forment les bases de ces représentations irréductibles. Ils serviront ensuite à donner une expression combinatoire pour les caractères de ces représentations.

Dans un deuxième temps, nous verrons que l'ensemble des tableaux peut être muni d'une structure de monoïde grâce à un algorithme imaginé par Schensted. C'est à partir des propriétés de ce monoïde que seront établies les identités qui mènent à la règle de Littlewood-Richardson.

Dans une dernière partie, nous présenterons des variantes de la règle de Littlewood-Richardson dues à Berenstein-Zelevinsky et Knutson-Tao, dans lesquelles l'énumération de tableaux de Littlewood-Richardson est remplacée par un comptage de points entiers dans un polytope convexe. Nous terminerons en évoquant la conjecture de saturation de Klyachko, qui a été démontrée grâce à l'une de ces variantes.

Table des matières

1.1 Rappels sur la théorie des représentations

1.1.1 Représentations linéaires des groupes

Une représentation linéaire d'un groupe G est un couple (ρ, V) où V est un espace vectoriel sur un corps K et ρ un morphisme de groupes de G vers $GL(V)$. Le *degré* d'une représentation est la dimension de l'espace vectoriel associé. De manière équivalente, une représentation de G correspond à une action (à gauche) de G sur V qui vérifie

$$\forall u, v \in V^2, \forall a, b \in K^2, \forall g \in G, g \cdot (au + bv) = a(g \cdot u) + b(g \cdot v) \quad (1.1.1)$$

Cette action à gauche peut être assimilée à une multiplication scalaire à gauche, induisant une troisième manière de définir une représentation. On définit la K -algèbre de groupe $K[G]$ comme étant l'ensemble des combinaisons formelles finies d'éléments de G à coefficients dans K :

$$K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} k_g g, k_g \in K \right\} \quad (1.1.2)$$

L'addition dans $K[G]$ est définie par

$$\left(\sum_{g \in G} k_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} k'_g g \right) = \sum_{g \in G} (k_g + k'_g) g \quad (1.1.3)$$

et la multiplication par

$$\left(\sum_{g \in G} k_g g \right) \times \left(\sum_{g \in G} k'_g g \right) = \sum_{g_1 \in G} \sum_{g_2 \in G} (k_{g_1} k'_{g_2}) (g_1 g_2) \quad (1.1.4)$$

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

Il est facile de vérifier que ces deux opérations donnent à $K[G]$ une structure de K -algèbre. Donner une représentation de G revient donc exactement à munir un K -espace vectoriel V d'une structure de $K[G]$ -module (à gauche). Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté sur K , on parlera simplement de G -module, et on omettra en général de spécifier le morphisme associé.

Deux représentations V et V' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espace vectoriel de V vers V' qui préserve l'action de G .

Le caractère χ_V d'une représentation (ρ, V) est l'application de G dans K définie par

$$\chi_V : g \mapsto \text{Tr}(\rho(g)) \quad (1.1.5)$$

Une représentation V est dite irréductible si V ne possède pas de sous-espace non trivial invariant sous l'action de G (c'est-à-dire si V ne possède pas de sous G -module non trivial).

1.1.2 Somme directe, produit tensoriel

Soient deux K -espaces vectoriels V et W de dimensions respectives s et t , et de bases respectives $(a_i)_{1 \leq i \leq s}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq t}$. La *somme directe* de V et W est définie comme étant l'espace vectoriel

$$V \oplus W = \{(v, w), v \in V, w \in W\} \quad (1.1.6)$$

Si G opère sur V et W , alors il opère également sur $V \oplus W$ via

$$\forall g \in G, \forall (v, w) \in V \oplus W, g \cdot (v, w) = ((g \cdot v), (g \cdot w)) \quad (1.1.7)$$

et donc $V \oplus W$ est une représentation de G de degré $s + t$.

On définit aussi le produit tensoriel de V et W comme étant l'espace vectoriel $V \otimes W$ engendré par les éléments

$$\{v \otimes w, v \in V, w \in W\} \quad (1.1.8)$$

et quotienté par les relations

$$\begin{cases} (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ kv \otimes w = v \otimes kw = k(v \otimes w) \end{cases} \quad (1.1.9)$$

Une base de $V \otimes W$ est donnée par

$$\{a_i \otimes b_j, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\} \quad (1.1.10)$$

De la même manière que pour la somme directe, si G agit sur V et W , alors G agit sur $V \otimes W$ via

$$\forall g \in G, \forall v \otimes w \in V \otimes W, g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w) \quad (1.1.11)$$

faisant de cet espace vectoriel une représentation de degré $s \times t$.

1.1.3 Représentations de $GL(E)$

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension m , et soit $G = GL(E)$. Quitte à fixer une base de E , on peut identifier G et $GL_m(\mathbb{C})$, et donc considérer les éléments de G comme des matrices. Dans ce cas, une représentation (ρ, V) de G sera dite polynomiale (respectivement rationnelle, holomorphe) si pour tout élément $g \in G$, les coefficients de la matrice $\rho(g)$ sont des fonctions polynomiales (respectivement rationnelles, holomorphes) en les coefficients de la matrice g . Le caractère d'une représentation polynomiale est le polynôme de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ égal à la trace de l'image par ρ de la matrice

$$Diag(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m \end{pmatrix} \quad (1.1.12)$$

Les théorèmes qui suivent sont des résultats classiques de la théorie des représentations. Leur démonstration est loin d'être triviale, et sort du cadre de ce mémoire, on pourra se reporter aux ouvrages de Fulton-Harris et Goodman-Wallace [GW99, FH91] pour plus de précision.

Soient H le sous-groupe de G des matrices diagonales, et B le groupe des matrices triangulaires supérieures. Un vecteur v d'une représentation s'appelle un *vecteur de poids* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ s'il vérifie :

$$\forall h \in H, h \cdot v = h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} v \quad (1.1.13)$$

où $h = diag(h_1, \dots, h_m)$. L'espace V peut alors se décomposer en une somme directe de *sous-espace de poids* :

$$V = \bigoplus V_\alpha, \quad V_\alpha = \{v \in V, \forall h \in H, h \cdot v = (\prod x_i^{\alpha_i})v\} \quad (1.1.14)$$

Un vecteur v de poids est dit de plus haut poids si

$$B \cdot v = \mathbb{C}^* \cdot v \quad (1.1.15)$$

Le premier théorème est le suivant :

Théorème 1.1.1

Une représentation de G est irréductible si et seulement si elle possède un unique vecteur de plus haut poids (à multiplication par un scalaire près). Deux représentations irréductibles sont isomorphes si et seulement si leurs vecteurs de plus haut poids ont les mêmes poids.

De plus, par définition des vecteurs de poids, le caractère de la représentation considérée peut s'exprimer en fonction de ces vecteurs. À un vecteur v de poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, est associé le monôme

$$x^v = \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \quad (1.1.16)$$

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

Ainsi, le caractère peut s'écrire

$$\chi_V(x_1, \dots, x_m) = \sum_v x^v \quad (1.1.17)$$

où la somme se fait sur l'ensemble des vecteurs de poids (à multiplication par un scalaire près). En particulier, le vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible peut être lu directement à partir de son caractère. Ainsi, d'après le théorème 1.1.1, une représentation irréductible de G est uniquement déterminée par son caractère.

Le deuxième théorème fondamental est :

Théorème 1.1.2

Toute représentation holomorphe de G se décompose de façon unique (à isomorphisme près) en une somme directe de représentations irréductibles.

Ce théorème implique en particulier qu'une représentation holomorphe de G est uniquement déterminée par son caractère. D'autre part, sachant que le caractère d'une somme directe (resp. d'un produit tensoriel) de représentations est la somme (resp. le produit) des caractères, il suffit pour décomposer effectivement une représentation en somme de représentations irréductibles de travailler au niveau des caractères.

Il existe essentiellement deux preuves de ce dernier théorème. La première prend un point de vue analytique et généralise la démonstration d'un théorème similaire sur les groupes finis en l'étendant aux groupes compacts. La seconde est plus algébrique et fait intervenir les opérateurs de Casimir.

1.2 Modules de Schur

1.2.1 Partitions et tableaux

Soit n un entier naturel. Une *partition* de n est une suite finie d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ telle que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = n \quad (1.2.1)$$

Une partition est naturellement définie à l'ordre des termes et au nombre d'éléments nuls près. Sauf mention contraire, les partitions seront donc représentées par des suites décroissantes d'entiers positifs, éventuellement complétées par des zéros. Il est aussi possible de représenter graphiquement une partition par un *diagramme de Ferrer*. Formellement, un diagramme de Ferrer est un sous ensemble fini μ de \mathbb{N}^2 tel que

$$((i, j) \in \mu \text{ et } 0 \leq a \leq i \text{ et } 0 \leq b \leq j) \Rightarrow (a, b) \in \mu \quad (1.2.2)$$

Un diagramme de Ferrer peut donc être vu comme un ensemble de "cases" justifié à gauche et en bas, et tel que la hauteur des colonnes soit décroissante au sens large. Si un diagramme μ contient n cases, alors la suite des longueurs des lignes forme une partition

de n , et réciproquement à toute partition de n correspond un unique diagramme. Dans ce cas n est appelée la *taille* du diagramme. Par exemple, la partition $(3, 3, 1)$ correspond au diagramme

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \tag{1.2.3}$$

Un *tabloïde* à valeur dans $[m] = \{1, \dots, m\}$ correspond à un remplissage des cases d'un diagramme μ par des valeurs de $[m]$. Formellement, un tabloïde t est donc une application

$$t : \mu \rightarrow [m] \tag{1.2.4}$$

La *forme* d'un tabloïde est le diagramme (et donc la partition) associé. Un tabloïde sera dit *injectif* si l'application sous-jacente est injective. Un *tableau* t est un tabloïde qui vérifie

$$t(i + 1, j) \geq t(i, j) \text{ et } t(i, j + 1) > t(i, j) \tag{1.2.5}$$

C'est à dire que les lignes d'un tableau sont croissantes au sens large, et les colonnes strictement croissantes. Un tableau *standard* à valeurs dans $[m]$ est un tableau injectif de taille m , c'est-à-dire qu'il contient une et une seule fois chaque élément de $[m]$. Voici par exemple un tabloïde, un tableau et un tableau standard à valeurs dans $\{1, \dots, 7\}$ et de forme $(3, 3, 1)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \tag{1.2.6}$$

1.2.2 Un problème universel

La construction suivante est traitée par Fulton [Ful96] de manière plus générale avec des modules sur un anneau quelconque. Nous n'évoquerons ici que le cas des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension m . Le produit cartésien de n copies de E est habituellement noté $E^{\times n}$, et un élément de $E^{\times n}$ est représenté par une suite de n éléments de E . Cependant, il est tout à fait possible de choisir de représenter un élément de $E^{\times n}$ par le remplissage d'un diagramme d'une certaine forme par n éléments de E (une fois fixé l'ordre dans lequel les cases doivent être remplies). Ainsi, à chaque partition λ d'un entier n , il est possible d'associer une certaine manière de voir le produit cartésien de n copies de E , que nous noterons $E^{\times \lambda}$ pour clairement l'identifier.

Pour F un \mathbb{C} -espace vectoriel, on considère une application $\phi : E^{\times \lambda} \rightarrow F$ qui vérifie les conditions suivantes :

- (a) ϕ est multilinéaire.

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

- (b) ϕ est alternée pour les colonnes de λ , c'est-à-dire qu'elle s'annule en les remplissages qui contiennent au moins deux éléments égaux sur une même colonne.
- (c) Pour tout $v \in E^{\times\lambda}$, on a $\phi(v) = \sum \phi(w)$, où la somme est prise sur tous les termes obtenus par le procédé suivant : on choisit 2 colonnes adjacentes de λ et une sous-partie de l'ensemble des cases de la colonne de droite, puis les w sont obtenus à partir de v en échangeant les éléments des cases choisies avec les éléments de la colonne de gauche, tout en préservant l'ordre de ces éléments dans les colonnes.

Le module de Schur E^λ est défini comme étant le domaine d'arrivée universel des fonctions ϕ qui vérifient ces trois propriétés. Cela signifie que E^λ est un \mathbb{C} -espace vectoriel, qu'il existe une application

$$\begin{aligned} E^{\times\lambda} &\rightarrow E^\lambda \\ v &\mapsto v^\lambda \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

qui satisfait (a)-(c), et que pour toute application ϕ de $E^{\times\lambda}$ dans F satisfaisant (a)-(c), il existe une unique application linéaire $\tilde{\phi}$ de E^λ dans F telle que

$$\forall v \in E^{\times\lambda}, \phi(v) = \tilde{\phi}(v^\lambda) \tag{1.2.8}$$

À titre d'exemple, considérons les deux cas extrêmes. On remarque tout d'abord que la propriété (a) est celle qui caractérise la n -ième puissance tensorielle $E^{\otimes n}$. Si $\lambda = (n)$, la propriété (b) n'impose plus rien, et la propriété (c) implique que la fonction ϕ est symétrique, et par conséquent que $E^{(n)}$ est égal à $E^{\otimes n}$ quotienté par les relations

$$\forall v_i \in E, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \tag{1.2.9}$$

Ainsi, $E^{(n)}$ est en fait la n -ième puissance symétrique de E notée $Sym^n(E)$. À l'opposé, si $\lambda = (1, 1, \dots, 1) = (1^n)$, c'est la propriété (c) qui n'impose plus rien, et la propriété (b) implique que ϕ est une fonction alternée. Il s'agit donc de $E^{\otimes n}$ quotienté par le sous-espace engendré par les éléments $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ contenant au moins deux entrées identiques. L'espace $E^{(1^n)}$ est donc en définitive égal à la n -ième puissance extérieure de E , notée $\wedge^n E$. Les modules de Schur constituent en quelque sorte l'ensemble des nuances possibles entre ces deux extrêmes.

1.2.3 Construction des modules de Schur

Étant donné une suite finie e_1, \dots, e_m d'éléments de E et un tabloïde t de forme λ et à valeurs dans $[m]$, un élément de $E^{\times\lambda}$ est obtenu simplement en remplaçant chaque occurrence de i dans t par e_i . L'image de cet élément dans E^λ est noté e_t . On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.2.1

Si (e_1, \dots, e_m) est une base de E , alors $E^\lambda \cong F/Q$ où F est l'espace vectoriel dont une base est formée par les e_t pour t parcourant les tabloïdes de forme λ à valeurs dans $[m]$, et Q est engendré par les éléments :

- (i) e_t si t contient 2 entrées identiques dans une colonne.
- (ii) $e_t + e_{t'}$ si t' est obtenu à partir de t en échangeant deux entrées dans une colonne.
- (iii) $e_t - \sum e_s$ où les s sont obtenus à partir de t comme dans la condition (c) du problème universel.

Démonstration : Par multilinéarité, les e_t engendrent E^λ , on a donc une surjection de F vers E^λ . Par définition, les propriétés (b) et (c) impliquent que les générateurs de Q sont envoyés sur 0, on a donc une surjection de F/Q vers E^λ . Par ailleurs, il est facile de vérifier que F/Q satisfait aux conditions (a)-(c), donc finalement $E^\lambda \cong F/Q$. ■

Dans la suite, nous allons donner une caractérisation classique de E^λ comme sous-espace vectoriel de dimension finie d'un certain anneau de polynômes. Les tableaux seront utilisés comme une façon particulièrement pratique et élégante de noter certains produits de mineurs. Le point clé de cette construction des modules de Schur en terme de déterminants est le lemme suivant dû à Sylvester :

Lemme 1.2.2 (Sylvester)

Soient M et N deux matrices carrés $p \times p$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on a l'identité

$$\det(M) \times \det(N) = \sum \det(M') \times \det(N')$$

où la somme se fait sur tous les couples (M', N') obtenus à partir de M et N en permutant un ensemble fixé de k colonnes de N avec k colonnes de M en respectant l'ordre des colonnes.

Démonstration : Comme le déterminant est une forme alternée, on peut sans perte de généralité supposer que les k colonnes considérées sont les k premières colonnes de N . Pour p vecteurs v_1, \dots, v_p , on note $|v_1 \dots v_p|$ le déterminant de ces vecteurs. L'égalité à prouver peut donc s'écrire

$$|v_1 \dots v_p| \cdot |w_1 \dots w_p| = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |v_1 \dots w_1 \dots w_k \dots v_p| \cdot |v_{i_1} \dots v_{i_k} w_{k+1} \dots w_p| \quad (1.2.10)$$

Pour prouver cette égalité, il suffit de prouver que la différence des deux membres est une forme alternée en les v_1, \dots, v_p, w_1 . En effet, la seule forme alternée en $p+1$ variables sur \mathbb{C}^p est 0. Si $v_i = v_{i+1}$ pour un certain i , alors les deux membres sont trivialement égaux. Si on fixe $v_p = w_1$, il suffit de prouver que la différence des 2 membres est aussi une forme alternée en les v_1, \dots, v_p, w_2 . De la même manière que précédemment, les deux membres sont égaux si $v_i = v_{i+1}$ pour un certain i . Et si $w_2 = v_p$, alors on a $w_1 = w_2$, et donc les deux membres sont égaux, donc la forme est bien alternée. ■

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

On considère ensuite l'anneau de polynôme à coefficients dans \mathbb{C} dont les indéterminées sont les éléments de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m,1} & \cdots & X_{m,m} \end{pmatrix} \quad (1.2.11)$$

En particulier, les mineurs de cette matrice sont donc des polynômes en les $X_{i,j}$. Soit c un tabloïde constitué d'une seule colonne, et i_1, \dots, i_p les éléments de c pris de bas en haut. On associe à c le mineur D_c constitué des p premiers éléments des colonnes indexées par les éléments de c .

$$D_c = \det \begin{pmatrix} X_{1,i_1} & \cdots & X_{1,i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p,i_1} & \cdots & X_{p,i_p} \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

Plus généralement, si t est un tabloïde quelconque dont les colonnes sont (c_1, \dots, c_k) , on pose

$$D_t = \prod_{i=1}^k D_{c_i} \quad (1.2.13)$$

Le lien entre ces produits de mineurs et les modules de Schur apparaît dans le lemme suivant :

Lemme 1.2.3

Soient λ une partition de n , E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension m et (e_1, \dots, e_m) une base de E . Pour tout tabloïde t de forme λ à valeurs dans $[m]$, soit e_t l'élément de E^λ correspondant à t . Alors il existe un homomorphisme canonique de E^λ vers $\mathbb{C}[X_{i,j}]$ qui envoie e_t sur D_t .

Démonstration : Il suffit de vérifier que les D_t satisfont aux conditions du lemme 1.2.1. Les conditions (i) et (ii) sont des propriétés basiques des déterminants. La condition (iii) découle du lemme de Sylvester appliqué à des matrices bien choisies. ■

Nous allons voir que cet homomorphisme est en réalité un isomorphisme, et donc que l'espace engendré par les D_t avec t de forme λ est une réalisation de E^λ . Par la même occasion, nous allons exhiber une base particulière de E^λ , en montrant le rôle particulier joué par les tabloïdes qui sont des tableaux.

Lemme 1.2.4

Les D_t pour t parcourant l'ensemble des tableaux de forme λ sont linéairement indépendants.

Démonstration : On introduit un ordre sur les indéterminées $X_{i,j}$ en posant que $X_{i,j} < X_{i',j'}$ si $i < i'$, ou si $i = i'$ et $j < j'$. Cet ordre s'étend naturellement aux monômes : $M_1 < M_2$ si le plus petit $X_{i,j}$ qui intervient avec un exposant différent dans ces deux monômes intervient

avec un plus petit exposant dans M_1 que dans M_2 . Cet ordre est évidemment compatible avec la multiplication. Si c est un tableau colonne dont les éléments sont $i_1 < \dots < i_p$, alors le plus petit monôme qui intervient dans D_c est celui formé sur la diagonale du déterminant, c'est-à-dire $\prod X_{p,i_p}$. Par suite, le plus petit monôme qui apparaît dans D_t où t est un tableau (en particulier, les colonnes de t sont strictement croissantes), est

$$\prod X_{i,j}^{m_t(i,j)} \quad (1.2.14)$$

où $m_t(i, j)$ est le nombre de fois que la lettre j apparaît dans la ligne i . On vérifie facilement que le coefficient de ce monôme est 1.

On introduit ensuite un ordre sur les tableaux, en posant que $t < t'$ si la première lettre pour laquelle t et t' diffèrent (en les parcourant dans le sens de lecture habituel) est plus petite dans t que dans t' . Ceci revient à dire que le plus petit i tel que les lignes i de t et t' sont différentes, et le plus petit j tel que $m_t(i, j) \neq m_{t'}(i, j)$ vérifient $m_t(i, j) < m_{t'}(i, j)$. Ainsi, dire que $t < t'$ implique que le plus petit monôme qui intervient dans D_t est strictement inférieur à tous ceux qui interviennent dans $D_{t'}$. Finalement, si on suppose qu'il existe des coefficients r_t tels que

$$\sum r_t D_t = 0 \quad (1.2.15)$$

alors en prenant t_0 minimal avec $r_{t_0} \neq 0$, le coefficient de $\prod X_{i,j}^{m_{t_0}(i,j)}$ dans la somme est r_{t_0} . Comme ce monôme est strictement inférieur à tous les autres, il s'ensuit que $r_{t_0} = 0$. ■

Théorème 1.2.5

Si e_1, \dots, e_m est une base de E , alors une base de E^λ est formée par les e_t où t parcourt les tableaux de forme λ à valeurs dans $[m]$.

Démonstration : Le lemme précédent implique que les e_t sont linéairement indépendants.

Il reste à prouver que si s n'est pas un tableau, alors e_s peut s'écrire comme combinaison linéaire des e_t . On introduit un ordre sur les tabloïdes, en posant que $s \prec s'$ si dans la colonne la plus à droite parmi celles qui diffèrent, l'élément de cette colonne le plus haut parmi ceux qui diffèrent est plus petit dans s que dans s' . On peut sans perte de généralité supposer que les colonnes de s sont strictement croissantes grâce aux conditions (i) et (ii) du lemme 1.2.1. Rendre les colonnes de s croissantes strictement revient en fait à remplacer s par un tabloïde s' tel que $s \prec s'$. Si s n'est toujours pas un tableau, c'est qu'une de ses lignes au moins n'est pas croissante, il existe donc deux entiers k, j tels que la k -ième lettre de la j -ième colonne est strictement plus grande que la k -ième lettre de la $(j + 1)$ -ième colonne. En vertu de la condition (iii) du même lemme, on peut donc écrire

$$e_s \equiv \sum e_t \quad (1.2.16)$$

où les t sont obtenus à partir de s en échangeant les k premières lettres de la colonne j avec les k premières lettres de la colonne $j + 1$. Si certains des t ainsi obtenus ne sont pas des tableaux, on itère ce processus en les décomposant à leur tour.

Il découle de la définition de \prec que les t qui apparaissent dans la somme sont tous strictement plus grands que s , ce qui implique que cet algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. En remarquant que les tableaux sont exactement les éléments maximaux pour l'ordre \prec , on déduit que le processus s'arrête lorsque les t obtenus sont tous des tableaux, ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 1.2.6

L'application de E^λ dans $\mathbb{C}[X_{i,j}]$ qui envoie e_t sur D_t est injective. En particulier, le sous-espace de $\mathbb{C}[X_{i,j}]$ dont une base est formée par les D_t pour t parcourant les tableaux de forme λ est une réalisation de E^λ .

1.3 Caractérisation des représentations irréductibles

Le groupe $G = GL_m(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}[X_{i,j}]$ simplement par multiplication matricielle entre un élément de $GL_m(\mathbb{C})$ et la matrice des indéterminées (1.2.11). Plus précisément, l'action est définie par :

$$\forall g \in G, \forall P \in \mathbb{C}[X_{i,j}], (g \cdot P)(X) = P(X \cdot g) \tag{1.3.1}$$

Les E^λ sont stables par l'action de G , ce sont donc des représentations de G . Le but de cette section est de montrer que ce sont exactement les représentations polynomiales irréductibles de G .

Si t est un tableau, on remarque tout d'abord que chaque e_t est un vecteur de poids α , où α_i est le nombre de fois que i apparaît dans t .

Lemme 1.3.1

L'unique (à multiplication par un scalaire près) vecteur de plus haut poids de E^λ est $e_{U(\lambda)}$, où $U(\lambda)$ est le tableau de forme λ dont la i -ième ligne ne contient que l'entier i .

Ainsi, du théorème 1.1.1 découle immédiatement le théorème suivant :

Théorème 1.3.2

Si λ a au plus m lignes, alors E^λ est une représentation polynomiale irréductible de $GL_m(\mathbb{C})$ de poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Par ailleurs, toute représentation polynomiale irréductible de $GL_m(\mathbb{C})$ est isomorphe à un unique E^λ .

D'une manière plus générale, il est possible de décrire toutes les représentations holomorphes irréductibles de $GL_m(\mathbb{C})$. On définit la représentation $D^{\otimes k}$ par

$$g \mapsto \det(g)^k \tag{1.3.2}$$

Cette représentation est évidemment irréductible, de degré 1, et elle est polynomiale seulement si $k \geq 0$. Ensuite, si V est une représentation irréductible de poids $(\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m)$, il suffit de choisir un k tel que

$$\forall i, \alpha_i - k \geq 0 \tag{1.3.3}$$

La représentation V peut alors être réalisée comme $E^\lambda \otimes D^{\otimes k}$ avec $\lambda_i = \alpha_i - k$. Ceci implique en particulier que toutes les représentations holomorphes irréductibles de $GL_m(\mathbb{C})$ sont rationnelles.

1.4 Caractères, polynômes de Schur

À tout tableau t à valeurs dans $[m]$ est associé le monôme x^t de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ où l'exposant de x_i est le nombre de fois que la lettre i apparaît dans t . On note T_λ l'ensemble des tableaux de forme λ . D'après la section qui précède et l'équation (1.1.17), le caractère de la représentation E^λ est

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t \in T_\lambda} x^t \quad (1.4.1)$$

Ce polynôme s'appelle le *polynôme de Schur* associé à λ . Le fait que E^λ et $E^{\lambda'}$ sont des représentations irréductibles non isomorphes si $\lambda \neq \lambda'$, ajouté au fait que ces représentations sont entièrement déterminées par leur caractère entraîne que les polynômes de Schur sont linéairement indépendants (ils forment en fait une base de l'algèbre des polynômes symétriques).

1.5 Énoncé du problème

Nous avons vu dans la section 1.1.3 que toute représentation irréductible de $GL(E)$ est complètement réductible. C'est vrai en particulier pour le produit tensoriel de deux modules de Schur :

$$E^\lambda \otimes E^\mu = \bigoplus_{\nu} (E^\nu)^{c_{\lambda, \mu}^\nu} \quad (1.5.1)$$

Le problème est donc de trouver un procédé efficace pour calculer les coefficients $c_{\lambda, \mu}^\nu$. D'après ce qui précède, ce problème se ramène en fait à trouver un algorithme pour décomposer le produit $s_\lambda \times s_\mu$ sur la base des polynômes de Schur.

1.6 Exemple

Le but de cette section est de détailler deux exemples de représentation de $GL_m(\mathbb{C})$ en terme de tableaux. Le premier est très simple dans la mesure où tous les tableaux considérés ont la même première colonne. Il présente néanmoins l'avantage d'être assez simple pour pouvoir expliciter l'action de G sans empiéter sur les marges de ce document.

1.6.1 Représentation de $GL_2(\mathbb{C})$ associée à $(3, 1)$

On considère dans cet exemple une représentation de $G = GL(E)$ où E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2. Les tableaux de forme $(3, 1)$ à valeurs dans $\{1, 2\}$ sont

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (1.6.1)$$

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

qui correspondent aux polynômes

$$\begin{cases} P_1(X_{i,j}) = (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,1}^2, \\ P_2(X_{i,j}) = (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,1}X_{1,2}, \\ P_3(X_{i,j}) = (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,2}^2 \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Ces polynômes forment donc une base de $E^{(3,1)}$. L'action d'un élément $g \in G$ sur cet espace se traduit via le produit

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_{1,1} + cX_{1,2} & bX_{1,1} + dX_{1,2} \\ aX_{2,1} + cX_{2,2} & bX_{2,1} + dX_{2,2} \end{pmatrix} \quad (1.6.3)$$

Ainsi

$$g \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{vmatrix} aX_{1,1} + cX_{1,2} & bX_{1,1} + dX_{1,2} \\ aX_{2,1} + cX_{2,2} & bX_{2,1} + dX_{2,2} \end{vmatrix} \quad (1.6.4)$$

et

$$g \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = |aX_{1,1} + cX_{1,2}|^2 \quad (1.6.5)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} g \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} &= (aX_{1,1} + cX_{1,2})^2 \\ &\quad \times [(aX_{1,1} + cX_{1,2})(bX_{2,1} + dX_{2,2}) \\ &\quad \quad - (aX_{2,1} + cX_{2,2})(bX_{1,1} + dX_{1,2})] \\ &= (a^3d - a^2bc)P_1 \\ &\quad + (2a^2cd - 2abc^2)P_2 \\ &\quad + (ac^2d - bc^3)P_3 \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

En procédant de même pour les deux autres tableaux de la base, il est possible d'expliciter le morphisme ρ associé à cette représentation.

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3d - a^2bc & 2a^2bd - 2ab^2c & ab^2d - b^3c \\ 2a^2cd - 2abc^2 & a^2d^2 - b^2c^2 & abd^2 - b^2cd \\ ac^2d - bc^3 & 2acd^2 - 2bc^2d & ad^3 - bcd^2 \end{pmatrix} \quad (1.6.7)$$

Enfin, le caractère associé à cette représentation est le polynôme de Schur $s_{(3,1)}(x_1, x_2)$ défini par

$$\begin{aligned} s_{(3,1)}(x_1, x_2) &= \sum_{t \in \mathcal{B}} x^t \\ &= x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 \\ &= x_1x_2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Ceci implique par ailleurs que si E est de dimension 2, alors

$$E^{(3,1)} = E^{(1,1)} \otimes E^{(2)} \quad (1.6.9)$$

1.6.2 Représentation de $GL_3(\mathbb{C})$ associée à $(2, 1)$

On considère dans cette section un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension 3. Les tableaux de forme $(2, 1)$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ sont

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (1.6.10)$$

qui correspondent aux polynômes

$$\mathcal{B} = \begin{cases} (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,1} \\ (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,2} \\ (X_{1,1}X_{2,3} - X_{2,1}X_{1,3})X_{1,1} \\ (X_{1,1}X_{2,3} - X_{2,1}X_{1,3})X_{1,2} \\ (X_{1,2}X_{2,3} - X_{2,2}X_{1,3})X_{1,2} \\ (X_{1,1}X_{2,3} - X_{2,1}X_{1,3})X_{1,3} \\ (X_{1,2}X_{2,3} - X_{2,2}X_{1,3})X_{1,3} \\ (X_{1,1}X_{2,2} - X_{2,1}X_{1,2})X_{1,3} \end{cases} \quad (1.6.11)$$

Ces polynômes forment une base de la représentation $E^{(2,1)}$ qui est donc de degré 8. Son caractère est

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 \quad (1.6.12)$$

1 Représentations polynomiales de $GL(E)$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux tableaux d'un point de vue purement combinatoire. La première section présente l'algorithme fondamental qui permet de munir l'ensemble des tableaux d'une structure de monoïde. La deuxième section présente une variante de cet algorithme qui permet d'établir une correspondance canonique entre l'ensemble des mots sur l'alphabet $[m]$ et certains couples de tableaux. Enfin, la troisième section introduit la notion de tableau gauche.

2.1 Le monoïde plaxique

2.1.1 Mots de tableaux

Étant donné un ensemble fini et ordonné \mathcal{A} , on appelle *mot* sur \mathcal{A} une suite finie d'éléments de \mathcal{A} , et on note ϵ le mot vide. On appelle \mathcal{A}^* l'ensemble des mots sur \mathcal{A} . La *concaténation* de deux mots consiste simplement à les écrire l'un à la suite de l'autre. Cette opération est associative, d'élément neutre ϵ , et confère donc à \mathcal{A}^* une structure de monoïde. Dans la suite, on prendra en général $\mathcal{A} = [m]$.

À tout tableau t à valeurs dans $[m]$, on associe très simplement un mot $w(t)$ en lisant les entrées de t de gauche à droite et de haut en bas. Par exemple

$$w \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & & \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right) = 7247133 \tag{2.1.1}$$

Un tel mot sera logiquement appelé un *mot tableau*. Un mot dont les lettres sont croissantes au sens large est appelé un *mot ligne*. Tout mot tableau peut être décomposé canoniquement en un produit de mots lignes, qui correspondent aux lignes du tableau. Par exemple 7247133 se décompose en $7 \cdot 247 \cdot 133$. Comme un mot tableau détermine

entièrement le tableau auquel il est associé, nous confondrons en général les termes de tableau et de mot tableau.

2.1.2 Insertion d'un mot dans un tableau

L'algorithme suivant a été introduit par Schensted [Sch61], initialement pour déterminer la longueur maximale d'un sous-mot croissant au sens large d'un mot donné. Il permet d'associer un (mot) tableau à un mot quelconque : la longueur recherchée est alors la longueur de la première ligne du tableau.

L'algorithme procède par insertion successive des lettres d'un mot dans un tableau. Soit t un tableau, $w_1 \cdot w_2 \dots w_n$ sa décomposition en mots lignes, et y la lettre à insérer. Deux cas peuvent se présenter :

- i) Si y est supérieure à toutes les lettres de w_n , y est simplement concaténée à la fin de w_n .
- ii) Dans le cas contraire, on cherche dans w_n la lettre y' la plus à gauche parmi celles qui sont strictement supérieures à y . On place y dans la case qui contenait y' , et on itère l'algorithme en insérant y' dans w_{n-1} .

L'insertion de y dans t sera notée $(t \leftarrow y)$. Cet algorithme a de nombreuses propriétés intéressantes. Nous en citerons quelques-unes :

- Il termine !
- Si t est un tableau et y une lettre, le tableau obtenu en insérant y dans t est encore un tableau.
- En particulier, l'insertion d'un mot w dans le tableau vide permet de construire un tableau à partir de w . Ce tableau est noté $P(w)$ et s'appelle le P -symbole de w .
- L'application P induit une relation d'équivalence sur \mathcal{A}^* définie par

$$w \sim w' \Leftrightarrow P(w) = P(w') \quad (2.1.2)$$

Comme P laisse fixe les tableaux et uniquement eux, chaque classe d'équivalence contient un et un seul tableau. Ceci implique que les tableaux forment un système complet de représentants.

- L'algorithme d'insertion induit aussi une loi de composition interne sur l'ensemble des tableaux, où le produit de t et t' est obtenu en insérant t' dans t .

$$t \star t' = (t \leftarrow w(t')) \quad (2.1.3)$$

L'élément neutre pour cette opération est le tableau vide.

2.1.3 Relation de Knuth

Dans le cas des mots de longueur 1 ou 2, la relation d'équivalence introduite dans la section précédente est triviale : deux mots sont équivalents seulement s'ils sont égaux. Les premiers cas non triviaux surviennent pour les mots de longueur 3, et Knuth [Knu70] a eu l'idée d'interpréter ces relations comme des règles de réécriture sur \mathcal{A}^* :

- (a) $v \cdot zxy \cdot w \leftrightarrow v \cdot xzy \cdot w$ si $x \leq y < z$
- (b) $v \cdot yzx \cdot w \leftrightarrow v \cdot yxz \cdot w$ si $x < y \leq z$

où x, y, z sont des lettres, et v, w des mots éventuellement vides. On dira de deux mots quelconques w et w' qu'ils sont équivalents au sens de Knuth, ce qu'on notera $w \equiv w'$, s'il existe une suite finie de transformations élémentaires (a) ou (b) permettant de passer de w à w' . Cette relation est évidemment compatible avec la concaténation, il s'agit donc d'une congruence sur le monoïde \mathcal{A}^* .

Ces relations ont une autre propriété intéressante : si w' est obtenu à partir de w par l'une des transformations de Knuth, on remarque que si on retire toutes les occurrences de la plus grande ou de la plus petite lettre de w et w' , ces deux mots restent équivalents. En effet, si une lettre maximale (respectivement minimale) intervient dans une transformation élémentaire (a) ou (b), alors c'est forcément dans le rôle de la lettre z (respectivement x). Par conséquent, le fait de la retirer rend la transformation triviale. Par ailleurs, il est évident qu'en retirant de w et w' une lettre qui n'intervient pas dans la transformation qui permet de passer de l'un à l'autre, les mots résultants sont encore équivalents. Par induction, on obtient le lemme plus général :

Lemme 2.1.1

Soient w, w' deux mots Knuth-équivalents. Soient w_0 et w'_0 les mots obtenus à partir de w et w' en retirant toutes les occurrences des k plus grandes et des l plus petites lettres de \mathcal{A} . Alors $w_0 \equiv w'_0$.

2.1.4 Monoïde plaxique

A ce stade, nous avons donc deux relations d'équivalence sur \mathcal{A}^* . L'une d'entre elle est facilement décidable algorithmiquement et possède un système de représentants particulièrement intéressant. L'autre est par définition une congruence, mais ne semble pas admettre de système de représentants privilégiés. Le résultat fondamental démontré par Knuth est qu'en réalité ces deux relations d'équivalence coïncident.

Théorème 2.1.2 (Knuth)

Deux mots w et w' sont équivalents au sens de Knuth si et seulement si ils ont le même P -symbole.

Ce sont Lascoux et Schützenberger [LS81] qui ont eu l'idée de quotienter \mathcal{A}^* par la relation d'équivalence de Knuth pour obtenir un monoïde, auquel ils ont donné le nom mystérieux de monoïde plaxique.

2.2 Correspondance de Robinson Schensted Knuth

2.2.1 Inversion de l'algorithme de Schensted

L'algorithme de Schensted peut être inversé en un certain sens. En effet, à la suite de l'insertion d'une lettre x dans un tableau t , le diagramme du tableau résultant contient

2 Combinatoire des tableaux

exactement une case de plus que celui de t . On vérifie d'ailleurs facilement que cette case est nécessairement un "coin", c'est-à-dire une case qui n'a ni case à sa droite ni case au dessus d'elle. En connaissant la position de cette case supplémentaire, et en notant y la lettre qu'elle contient, il est possible de retrouver t et x . Soit $w_1 \cdot w_2 \dots w_n$ la décomposition de t en mots lignes. Supposons que y appartienne à la ligne w_i , alors :

- i) Si $i = n$, y est nécessairement la dernière lettre de w_n . Dans ce cas on "sort" simplement y du tableau.
- ii) Dans le cas contraire, on cherche dans w_{i+1} la lettre y' la plus à droite parmi celles qui sont inférieures ou égales à y . On place y dans la case qui contenait y' , et on itère l'algorithme.

En itérant ce procédé, il est donc possible de "déconstruire" le tableau et de retrouver le mot initial. La mise en oeuvre de cet algorithme nécessite cependant de connaître l'ordre dans lequel les cases sont apparues lors de l'exécution de l'algorithme de Schensted. Or, un tableau standard correspond justement à une suite croissante de diagrammes

$$\emptyset \subset \lambda^{(1)} \subset \dots \subset \lambda^{(i)} \dots \subset \lambda^{(n)} \quad (2.2.1)$$

où $\lambda^{(i)}$ est une partition de i , et $\lambda^{(i+1)}$ est obtenu à partir de $\lambda^{(i)}$ en y ajoutant une case dans un "coin". Si on remplit le diagramme final en plaçant la lettre i dans la case qui apparaît à la i -ième étape, on obtient un tableau standard qui détermine entièrement l'ordre dans lequel les cases ont été ajoutées. Par exemple, le tableau standard

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.2.2)$$

correspond à la suite

$$\emptyset \rightarrow \square \rightarrow \square \square \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.2.3)$$

On modifie donc l'algorithme de Schensted pour "mémoriser" l'ordre dans lequel les cases ont été ajoutées. On pose $(P^{(0)}, Q^{(0)}) = (\emptyset, \emptyset)$. On insère un mot $w = w_1 w_2 \dots w_n$ par le procédé suivant :

- i) $P^{(i)} = (P^{(i-1)} \leftarrow w_i)$.
- ii) On place la lettre i dans la case de $Q^{(i-1)}$ qui apparaît dans $P^{(i)}$ mais pas dans $P^{(i-1)}$.

On associe de cette manière au mot w un couple (P, Q) de tableaux, où Q est un tableau standard. Cet algorithme étant inversible, il établit une bijection (la correspondance de Robinson-Schensted) entre \mathcal{A}^* et l'ensemble des couples (P, Q) , où P est un tableau et Q un tableau standard.

2.2.2 Correspondances

Un bi-mot est un couple de mots (u, v) de même longueur, souvent représenté par une matrice à 2 lignes

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

On dira qu'un bi-mot est trié dans l'ordre lexicographique si

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \quad (2.2.5)$$

et si

$$u_i = u_{i+1} \Rightarrow v_i \leq v_{i+1} \quad (2.2.6)$$

Knuth a généralisé la correspondance RS en considérant le cas où le tableau Q n'est pas nécessairement standard. Il a ainsi établi une bijection entre l'ensemble des couples (P, Q) de tableaux et l'ensemble des bi-mots triés dans l'ordre lexicographique. Le principe est sensiblement le même que pour la correspondance RS :

- i) $P^{(i)} = (P^{(i-1)} \leftarrow v_i)$.
- ii) On place la lettre u_i dans la case de $Q^{(i-1)}$ qui apparaît dans $P^{(i)}$ mais pas dans $P^{(i-1)}$.

La correspondance RS est donc un cas particulier où le bi-mot considéré est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

Enfin, il existe une certaine symétrie dans la correspondance RSK, comme l'illustre le lemme suivant :

Lemme 2.2.1

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ un bi-mot lexicographique. On définit U^{-1} l'inverse de U comme étant le bi-mot obtenu en échangeant les 2 lignes de U et en triant le résultat dans l'ordre lexicographique. Si (P, Q) est le couple de tableaux associé à U par la correspondance RSK, alors celui associé à U^{-1} est (Q, P) .

2.3 Tableaux gauches et jeu de taquin

Soient deux diagrammes λ et μ tels que $\mu \subset \lambda$. On appelle *diagramme gauche* λ/μ le sous ensemble de \mathbb{N}^2 obtenu comme différence de λ et μ . On définit de la même manière que pour les tabloïdes les notions de tableau gauche et de mot de lecture d'un tableau gauche. Voici par exemple un tableau gauche de forme $(3, 3, 1)/(2, 1)$:

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad (2.3.1)$$

2 Combinatoire des tableaux

Contrairement à ce qu'il se passait pour les tableaux, tout mot est le mot de lecture d'au moins un tableau gauche : celui obtenu en plaçant les lettres du mot en diagonale. Par exemple,

$$4321 \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{4} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{array} \quad (2.3.2)$$

Étant donné un tableau gauche γ , il est possible de faire “coulisser” les cases pour combler l'espace vide et obtenir un tableau. Cet algorithme s'appelle le “jeu de taquin” en hommage au célèbre puzzle imaginé en 1870 par Sam Loyd et repose sur les transformations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \quad \text{si } b \leq a \quad (2.3.3)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \text{si } b > a \quad (2.3.4)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad (2.3.6)$$

Le fait remarquable est que le tableau obtenu en appliquant ces transformations est toujours le même quel que soit l'ordre dans lequel on les applique. Ce tableau s'appelle le *redressé* du tableau gauche. Un fait plus remarquable encore découle du lemme suivant :

Lemme 2.3.1

L'algorithme du jeu de taquin est compatible avec les relations de Knuth. En particulier, le tableau obtenu à partir d'un tableau gauche γ est le P -symbole du mot de lecture de γ .

L'algorithme du jeu de taquin fournit donc un procédé alternatif pour déterminer le P -symbole d'un mot quelconque.

Règle de Littlewood-Richardson

La règle de Littlewood Richardson est un outil purement combinatoire qui permet de multiplier deux polynômes de Schur. Plus précisément, elle permet d'exprimer le produit de deux polynômes de Schur sous la forme

$$s_\lambda \times s_\mu = \sum_{\nu} c'_{\lambda,\mu}{}_{\nu} s_\nu \quad (3.0.1)$$

où les $c'_{\lambda,\mu}{}_{\nu}$ sont des entiers positifs ou nuls. Elle a été introduite par Littlewood et Richardson [LR34]. Les bases de sa démonstration ont été en grande partie posées par Robinson [Rob38]. Voir par exemple le commentaire de Van Leeuwen [vL01] à propos de ces deux articles et de l'histoire de la règle de Littlewood-Richardson.

3.1 Analogie plaxique des polynômes de Schur

On note $R[m]$ le \mathbb{Z} -module libre dont une base est formée par les tableaux à valeurs dans $[m]$. On munit $R[m]$ d'une structure de \mathbb{Z} -algèbre via la loi de composition du monoïde plaxique¹. L'application

$$\pi : t \longmapsto x^t \quad (3.1.1)$$

définit un homomorphisme de \mathbb{Z} -algèbre de $R[m]$ dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$. Si λ est une partition d'un entier n , on note T_λ l'ensemble des tableaux de forme λ , et on pose

$$S_\lambda = \sum_{t \in T_\lambda} t \quad (3.1.2)$$

On constate immédiatement que le polynôme de Schur s_λ est l'image par π de S_λ dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$.

¹De la même manière que dans (1.1.4)

3.2 Démonstration de la règle de LR

La clé de la démonstration est le lemme suivant :

Lemme 3.2.1

Soit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

un bi-mot trié lexicographiquement, et (P, Q) le couple de tableaux qui lui correspond. Soit t un tableau quelconque de forme λ , et μ la forme du tableau obtenu en insérant v dans t . On considère le tableau gauche γ de forme μ/λ obtenu en remplissant successivement avec u_1, u_2, \dots, u_n les cases qui apparaissent lors de l'insertion de v dans t . Alors le redressé de γ est Q .

Démonstration : Soit t_0 un tableau de même forme que t , à valeurs dans un alphabet dont les lettres sont strictement plus petites que celles de γ (par exemple en utilisant des entiers négatifs). Le couple (t, t_0) correspond à un bi-mot lexicographique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Le bi-mot

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

est par hypothèse trié lexicographiquement, et correspond à la paire $(t \star P, V)$, où V est le tableau dans lequel les éléments a_1, \dots, a_n forment exactement le tableau t_0 , et les éléments u_1, \dots, u_n forment exactement le tableau gauche γ .

On échange à présent les deux lignes de ce bi-mot, et on trie le résultat dans l'ordre lexicographique. Par le lemme 2.2.1, ce nouveau bi-mot correspond au couple $(V, t \star P)$, et ce bi-mot auquel on retire toutes les bi-lettres $\begin{pmatrix} b_j \\ a_j \end{pmatrix}$ correspond à (Q, P) . Par définition, le mot constituant la ligne du bas de ce bi-mot est Knuth équivalent à $w(V)$, et ce mot privé des a_j est donc Knuth équivalent à $w(Q)$. Mais retirer les lettres a_j , c'est-à-dire les n plus petites lettres, de $w(V)$ revient exactement à conserver le mot $w(\gamma)$, qui est donc Knuth équivalent à $w(Q)$ d'après le lemme 2.1.1. Ceci implique que le redressé de γ est Q . ■

Pour tout tableau U_0 de forme μ , on note $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$ l'ensemble des tableaux gauches de forme ν/λ dont le redressé est U_0 , et pour tout tableau V_0 de forme ν , on note $\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$ l'ensemble des couples (T, U) de tableaux de formes respectives λ et μ dont le produit est V_0 . La règle de Littlewood Richardson proprement dite découle du théorème suivant :

Théorème 3.2.2

Pour tout tableau U_0 de forme μ et V_0 de forme ν , il existe une correspondance bijective entre $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$ et $\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$.

Démonstration : Soit

$$(T, U) \in \mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$$

3.2 Démonstration de la règle de LR

Par définition, U et U_0 sont de même forme, on considère donc le bi-mot

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m \end{pmatrix}$$

qui correspond au couple (U, U_0) par la correspondance RSK. On insère v dans T et on construit un tableau gauche S en insérant les u_i dans les cases qui apparaissent lors de cette opération. Par définition, l'insertion de v dans T donne le tableau $T \star U = V_0$ qui est de forme ν . Le lemme 3.2.1 dit précisément que

$$S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$$

Réciproquement, soit

$$S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$$

et T_0 un tableau quelconque de forme λ dont toutes les lettres sont plus petites que les lettres de S . Comme S est de forme ν/λ , on peut "emboîter" S et T_0 de manière à former un tableau $(T_0)_S$ de forme ν .

Le couple $(V_0, (T_0)_S)$ correspond à un bi-mot

$$\begin{pmatrix} t_1 \dots t_n u_1 \dots u_m \\ x_1 \dots x_n v_1 \dots v_m \end{pmatrix}$$

Il reste à prouver qu'il existe deux tableaux T et U tels que

$$(T, T_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1 \dots t_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix}$$

et

$$(U, U_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m \end{pmatrix}$$

Le fait que le deuxième tableau du premier couple soit T_0 est évident par construction, et le fait qu'il s'agit bien de U_0 dans le deuxième couple découle du lemme 3.2.1. Finalement, $T \star U$ correspond au mot $x_1 \dots x_n v_1 \dots v_m$, c'est-à-dire au tableau V_0 . Enfin, T et U sont respectivement de même forme que T_0 et U_0 , c'est-à-dire de formes λ et μ . Ceci entraîne que

$$(T, U) \in \mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) \quad \blacksquare$$

La première conséquence immédiate de ce théorème est que le cardinal de ces deux ensembles ne dépend pas du choix de U_0 et de V_0 . En particulier, le nombre de manières dont un tableau peut se factoriser en un produit de deux tableaux de formes données ne dépend que de sa propre forme. Autrement dit, dans le produit

$$S_\lambda \times S_\mu \tag{3.2.1}$$

le nombre de fois qu'un certain tableau apparaît ne dépend que de sa forme. En posant

$$c'_{\lambda, \mu} = \#\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) \tag{3.2.2}$$

où V_0 est un tableau quelconque de forme ν , ceci implique que tous les tableaux possibles d'une forme donnée ν apparaissent dans le produit avec le même coefficients $c'_{\lambda, \mu}$

3 Règle de Littlewood-Richardson

(éventuellement nul), et donc qu'ils peuvent être regroupés pour faire apparaître le terme $c_{\lambda,\mu}^{\nu} S_{\nu}$. Il en découle l'identité suivante dans $R[m]$:

$$S_{\lambda} \times S_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda,\mu}^{\nu} S_{\nu} \quad (3.2.3)$$

Cette identité se transpose dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ grâce à l'homomorphisme π défini dans la section 3.1, établissant ainsi le corollaire :

Corollaire 3.2.3 (Règle de Littlewood-Richardson)

Pour toute partition λ et μ , l'identité

$$s_{\lambda} \times s_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda,\mu}^{\nu} s_{\nu} \quad (3.2.4)$$

(avec $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ défini dans (3.2.2)) est vérifiée dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$.

Il est clair que $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ sera nul sauf éventuellement si $\lambda \subset \nu$ et si $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$. Sachant qu'on peut démontrer que les polynômes de Schur forment une base de la \mathbb{Z} -algèbre des polynômes symétriques en m variables, une autre conséquence remarquable de ce théorème est que la sous \mathbb{Z} -algèbre de $R[m]$ engendrée par les S_{λ} est isomorphe à $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{\mathfrak{S}_m}$, et donc en particulier est commutative.

3.3 Tableaux de Littlewood-Richardson

On appelle mot de Yamanouchi un mot $w = x_1 \dots x_r$ tel que toute suite x_r, x_{r-1}, \dots, x_s obtenue en lisant w de la droite vers la gauche contient au moins autant de 1 que de 2, au moins autant de 2 que de 3, et ainsi de suite. Par exemple, le mot 2132121 est un mot de Yamanouchi, contrairement au mot 1232121.

Lemme 3.3.1

Si w et w' sont deux mots équivalents au sens de Knuth, alors w est un mot de Yamanouchi si et seulement si w' en est un également.

Démonstration : Si w' est obtenu à partir de w grâce à la transformation

$$w = uyxzv \mapsto w' = uyzxv \text{ avec } x < y \leq z \quad (3.3.1)$$

il s'agit alors de regarder les changements dans le nombre de lettres consécutives k et $(k+1)$ induit par la transformation. Si $x < y < z$, il n'y a aucun changement : le seul cas non trivial est celui où $x = y = k$ et $z = k+1$. Si w est un mot de Yamanouchi, alors v en est un également, et donc le nombre de lettres k dans v est supérieur ou égal au nombre de lettres $k+1$. Dans ce cas, les mots $yxzv$ et $yzxv$ sont tous deux des mots de Yamanouchi. Le cas de la seconde transformation de Knuth se traite de la même manière. ■

Un tableau gauche de Littlewood-Richardson est un tableau dont le mot de lecture est un mot de Yamanouchi. On dit que le contenu d'un tableau gauche est $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$

s'il contient μ_i fois la lettre i , et on appelle $U(\mu)$ le tableau formé en plaçant μ_i lettre i sur la $i^{\text{ème}}$ ligne. Par exemple,

$$U(4, 3, 2) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.3.2)$$

Une caractérisation pratique des tableaux gauches de Littlewood-Richardson découle du lemme suivant :

Lemme 3.3.2

Un tableau gauche de contenu μ est un tableau gauche de Littlewood-Richardson si et seulement si son redressé est $U(\mu)$.

Démonstration : Comme tout tableau gauche est Knuth-équivalent à un et un seul tableau, en vertu du lemme 3.3.1 il suffit de vérifier cette propriété pour les tableaux. Soit t un tableau de contenu μ . Pour que $w(t)$ soit un mot de Yamanouchi, il est nécessaire par définition que la première ligne se termine par un 1. Puisque t est un tableau, la première ligne ne peut par conséquent contenir que des 1. La croissance stricte sur les colonnes impose que la dernière lettre de la deuxième ligne est strictement supérieure à 1, et le fait que $w(t)$ soit de Yamanouchi implique qu'il s'agit d'un 2. La deuxième ligne est donc constituée exclusivement de 2. En poursuivant le même raisonnement, on en déduit que $t = U(\mu)$. ■

En reprenant les termes du théorème 3.2.2, le lemme précédent dit en fait que l'ensemble des tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme ν/λ et de contenu μ n'est rien d'autre que $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U(\mu))$, avec comme conséquence immédiate :

Théorème 3.3.3

le coefficient $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ est égal au nombre de tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme ν/λ et de contenu μ .

3.4 Exemple

Nous allons utiliser ce qui précède pour décrire le produit tensoriel $E^{(2,1)} \otimes E^{(2,1)}$. La structure de $E^{(2,1)}$ quand E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3 a été donnée dans la section 1.6.2. L'objectif est donc de calculer les coefficients $c_{(2,1), (2,1)}^{\nu}$. Il a été établi précédemment que ces coefficients sont nuls sauf éventuellement si $|\nu| = |(2,1)| + |(2,1)| = 6$, il s'ensuit que ν doit être une partition de l'entier 6, ce qui laisse 11 possibilités. Par ailleurs, d'après la première définition des coefficients de Littlewood-Richardson en terme de produits de tableaux, on doit avoir $(2,1) \subset \nu$, ce qui exclut les partitions $(1,1,1,1,1,1)$ et (6) . Il s'agit donc à présent, pour les partitions ν encore possibles, d'énumérer les tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme $\nu/(2,1)$ et de contenu $(2,1)$, c'est-à-dire contenant exactement deux lettres 1 et une lettre 2.

Le diagramme gauche de forme $(2,1,1,1,1)/(2,1)$ est en fait le diagramme $(1,1,1)$. La stricte croissance sur les colonnes implique qu'il n'existe pas de tableau de cette forme et de contenu $(2,1)$. Le coefficient associé est donc nul.

3 Règle de Littlewood-Richardson

Les cas où ν est l'une des partitions $(2, 2, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 1, 1, 1)$, $(3, 3)$ se règlent facilement, puisqu'il n'existe à chaque fois qu'un seul tableau gauche de contenu $(2, 1)$, et qu'il s'agit bien à chaque fois d'un tableau gauche de Littlewood-Richardson. Les tableaux gauches correspondant à ces 4 partitions sont, dans l'ordre,

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.4.1)$$

Pour les partitions restantes, il faut éliminer les tableaux gauches qui ne sont pas de Littlewood-Richardson. Pour la partition $(3, 2, 1)$, par exemple, il existe 3 tableaux gauches de contenu $(2, 1)$:

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (3.4.2)$$

Le dernier de cette liste n'étant toutefois pas de Littlewood-Richardson, le coefficient associé à cette partition vaut donc 2. De la même manière, pour les partitions $(4, 1, 1)$ et $(4, 2)$, il existe à chaque fois 2 tableaux gauches de contenu $(2, 1)$, dont un seul est de Littlewood-Richardson, à savoir respectivement

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.4.3)$$

On obtient donc finalement par un procédé purement combinatoire la décomposition

$$\begin{aligned} E^{(2,1)} \otimes E^{(2,1)} &= E^{(2,2,1,1)} \oplus E^{(2,2,2)} \oplus E^{(3,1,1)} \oplus 2E^{(3,2,1)} \\ &\quad \oplus E^{(3,3)} \oplus E^{(4,1,1)} \oplus E^{(4,2)} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Coefficients de LR et polytopes convexes

Dans cette partie, nous introduisons une approche plus récente des coefficients de Littlewood-Richardson à travers différents modèles combinatoires. Ces modèles ont en commun de placer le calcul des $c'_{\lambda, \mu}$ dans le cadre plus général du comptage de points entiers dans un polytope convexe. Cette approche a d'abord été initiée par Berenstein et Zelevinsky, puis reprise par Knutson et Tao qui ont ainsi démontré une importante conjecture.

Ces différents modèles présentent l'avantage de faire apparaître de manière plus évidente des propriétés et symétries des coefficients de LR. Par ailleurs, ils permettent de s'abstraire du langage des tableaux qui est intimement lié aux représentations de $GL_n(\mathbb{C})$, et offrent donc des possibilités de généralisations à la représentation d'autres groupes et algèbres de Lie. Le but de ce chapitre est de présenter des bijections explicites entre ces modèles et celui des tableaux gauches de LR.

L'équation (4.0.1) montre les quatre tableaux gauches de LR de forme

$$(10, 8, 7, 5)/(7, 6, 3)$$

et de contenu $(6, 4, 3, 1)$ qui serviront de fil conducteur pour illustrer les bijections entre les différents modèles.

1	1	2	3	4	
	1	2	3	3	
		2	2		
			1	1	1

1	2	3	3	4	
	1	1	2	3	
		2	2		
			1	1	1

(4.0.1)

1	1	3	3	4	
	2	2	2	3	
		1	2		
			1	1	1

1	2	3	3	4	
	1	2	2	3	
		1	2		
			1	1	1

4.1 Triangles de Littlewood-Richardson

Ce premier modèle introduit par Pak et Vallejo [PV05] joue un rôle charnière entre les tableaux gauches de LR et les autres modèles : il consiste essentiellement en une reformulation directe de ces tableaux gauches dans le langage des polytopes.

Pour tout entier k , on considère le triangle formé de k^2 petits triangles équilatéraux (fig 4.1). Ce triangle contient $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ sommets. L'objectif est de traduire les tableaux

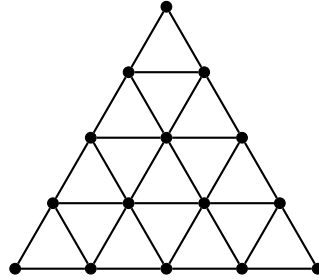


FIG. 4.1 : Triangle de taille 4.

gauches de LR en terme d'étiquetage des sommets de ces triangles. On remarque tout d'abord que d'une manière générale, une ligne d'un tableau gauche de forme ν/λ est entièrement déterminée par la donnée du nombre de "cases vides" placées au début de la ligne (qui n'est autre que λ_i), et par le nombre d'occurrences de chaque lettre (les lignes étant croissantes, la donnée du nombre d'occurrences de chaque lettre suffit à reconstituer la ligne). Par ailleurs, il est aisé de vérifier (par exemple en reprenant la démonstration du lemme 3.3.2) que dans un tableau gauche de LR, la lettre i ne peut pas apparaître avant la i -ième ligne. Par conséquent, une ligne j quelconque est déterminée par la donnée de $j + 1$ coefficients a_{ij} définis par

$$\begin{cases} a_{0j} = \lambda_j \\ a_{ij} \text{ est le nombre de } i \text{ dans la ligne } j, \text{ pour } 1 \leq i \leq j \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Si par ailleurs le tableau gauche considéré est de contenu μ , il découle immédiatement de la définition des a_{ij} que

$$\begin{cases} \lambda_j = a_{0j} & \forall 1 \leq j \leq k \\ \nu_j = \sum_{p=0}^j a_{pj} & \forall 1 \leq j \leq k \\ \mu_i = \sum_{q=i}^k a_{iq} & \forall 1 \leq i \leq k \end{cases} \quad (4.1.2)$$

où k est le nombre de termes non nuls de la plus longue des partitions λ, ν et μ .

Réciproquement, pour que la donnée de coefficients entiers positifs a_{ij} corresponde à un tableau gauche de LR, il faut que ces coefficients respectent les conditions imposées

à ces tableaux gauches. La croissance sur les lignes est immédiate par construction. La croissance stricte sur les colonnes et le fait que le mot de lecture soit de Yamanouchi correspondent aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{i-1} a_{pj} \geq \sum_{p=0}^i a_{pj+1} & \forall 1 \leq i \leq j \leq k \\ \sum_{q=i}^j a_{iq} \geq \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1q} & \forall 1 \leq i \leq j \leq k \end{cases} \quad (4.1.3)$$

On considère ensuite l'ensemble des étiquetages du triangle de taille k par des réels a_{ij} tels que $a_{00} = 0$ (fig 4.2).

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_{00} \\ & & & & & \\ & & & & & a_{01} & a_{11} \\ & & & & & a_{02} & a_{12} & a_{22} \\ & & & & & a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ & & & & & a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}$$

FIG. 4.2 : Étiquetage du triangle de taille 4.

Cet ensemble est un espace vectoriel de dimension $\frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1$, que l'on notera T_k . On appelle *triangle de Littlewood-Richardson* de taille k et de type (λ, μ, ν) un étiquetage du triangle de taille k par des réels positifs ou nuls qui vérifient les inégalités (4.1.3), avec (λ, μ, ν) définis comme dans (4.1.2). On note LR_k le cône des triangles de LR, et $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ l'ensemble des triangles de LR de type (λ, μ, ν) . L'ensemble $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$, est un polytope convexe dans T_k . Le théorème suivant découle directement de ce qui précède :

Théorème 4.1.1

L'application définie par l'équation (4.1.1) envoie bijectivement l'ensemble des tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme ν/λ et de contenu μ vers l'ensemble des points à coordonnées entières de $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$. En particulier, le coefficient $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ est égal au nombre de points entiers dans $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$.

Les triangles de LR qui correspondent aux triangles gauches de l'équation (4.0.1) apparaissent sur la figure 4.3.

4.2 Triangles de Berenstein-Zelevinsky

Les triangles de Berenstein-Zelevinsky constituent historiquement la première traduction de la règle de LR en terme de comptage de points entiers dans un polytope. Beren-

4 Coefficients de LR et polytopes convexes

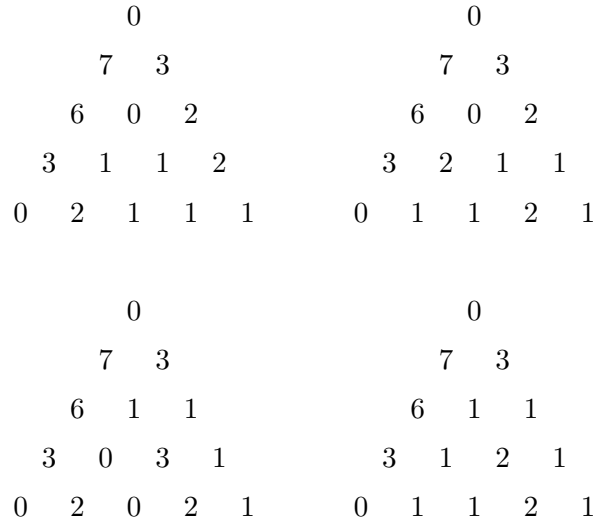


FIG. 4.3 : Triangles de LR de type $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$.

stein et Zelevinsky ont conjecturé la validité de cette construction, puis en ont donné une preuve directe en utilisant la notion de \mathfrak{g} -partition [BZ88, BZ92]. Le support des triangles de BZ est un triangle équilatéral subdivisé en petits triangles et en hexagones (fig. 4.4). Ce triangle peut être vu comme la juxtaposition de trois triangles distincts étiquetés

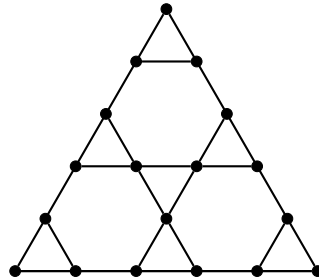


FIG. 4.4 : Triangle de Berenstein-Zelevinsky Γ_3 .

respectivement par des réels (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (fig. 4.5). Les triangles de BZ proprement dit correspondent aux étiquetages par des réels positifs qui vérifient en plus

$$\begin{cases} y_{ij} + z_{ij} = y_{i+1j+1} + z_{ij+1} \\ x_{ij+1} + y_{ij} = x_{i+1j+1} + y_{i+1j+1} \\ x_{ij+1} + z_{ij+1} = x_{i+1j+1} + z_{ij} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Il est à noter que chacune de ces égalités se déduit des deux autres. Visuellement, elles se traduisent par le fait que la somme des éléments sur les sommets d'une arête d'un

4.2 Triangles de Berenstein-Zelevinsky

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & x_{11} & & \\
 & & & & y_{11} & z_{11} & \\
 & & & x_{12} & & x_{22} & \\
 & & y_{12} & z_{12} & y_{22} & z_{22} & \\
 & x_{13} & & x_{23} & & x_{33} & \\
 y_{13} & z_{13} & y_{23} & z_{23} & y_{33} & z_{33} &
 \end{array}$$

FIG. 4.5 : Étiquetage du triangle de BZ Γ_3 .

hexagone est égale à la somme des éléments des sommets de l'arête qui lui fait face. On dit d'un triangle de BZ qu'il est de type (λ, μ, ν) si

$$\begin{cases} x_{1j} + y_{1j} = \lambda_j - \lambda_{j+1} \\ x_{1j} + z_{1j} = \nu_j - \nu_{j+1} \\ y_{1j} + z_{1j} = \mu_j - \mu_{j+1} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Contrairement aux triangles de LR, un triangle de BZ peut être de plusieurs types. Là encore, l'ensemble $BZ_k(\lambda, \mu, \nu)$ des triangles de BZ de taille k et de type (λ, μ, ν) est un polytope convexe.

Il est possible d'envoyer un triangle de LR sur un triangle de BZ simplement en prenant les différences des membres des inégalités (4.1.3). Plus précisément, on définit une application ϕ de l'ensemble des triangles de LR vers l'ensemble des triangles de BZ par

$$\begin{cases} x_{ij} = \sum_{p=0}^{i-1} a_{pj} - \sum_{p=0}^i a_{p(j+1)} \\ y_{ij} = a_{i,j+1} \\ z_{ij} = \sum_{q=i}^j a_{iq} - \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1q} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

pour tout $1 \leq i \leq j < k$. Un simple calcul permet de vérifier que les (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) ainsi définis vérifient les égalités (4.2.1).

Théorème 4.2.1

Pour toutes partitions (λ, μ, ν) de longueur k , l'application ϕ induit une surjection de LR_k vers BZ_{k-1} et une bijection de $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ vers $BZ_{k-1}(\lambda, \mu, \nu)$. En particulier, le polytope $BZ_{k-1}(\lambda, \mu, \nu)$ contient $c_{\lambda, \mu}'$ points entiers.

4 Coefficients de LR et polytopes convexes

Démonstration : Soit $X \in BZ_{k-1}$. On pose alors $A = (a_{ij})$ défini par

$$\begin{cases} a_{0k} = 0 \\ a_{0j} = \sum_{l=j}^{k-1} x_{1l} + y_{1l} & \forall 1 \leq j < k \\ a_{ij} = y_{i,j-1} & \forall 1 \leq j \leq k \\ a_{jj} = \sum_{l=j}^{k-1} z_{ll} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

On vérifie que $A \in LR_k$, et que $\phi(A) = X$, ce qui prouve le premier point. Par ailleurs, si $A \in LR_k$, alors $\phi(A)$ est de même type que A , donc ϕ induit une surjection de $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ vers $BZ_k(\lambda, \mu, \nu)$.

Enfin, on remarque que les coefficients y_{ij} de $\phi(A)$ correspondent exactement à tous les éléments de A qui ne sont pas situés sur sa “bordure” gauche ou droite. Donc si A et B sont deux triangles de LR différents qui sont envoyés sur le même triangle de BZ, alors ils diffèrent nécessairement par un élément situé sur une de ces bordures (c’est-à-dire par un élément de la forme a_{0j} ou a_{jj}). Dans les deux cas, ceci implique que A et B sont de types différents. Par conséquent, la restriction de ϕ à $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ est injective. ■

Les triangles de BZ qui correspondent aux triangles de LR de la figure 4.3 sont ceux de la figure 4.6. Pour terminer, il est à noter que les triangles de BZ font apparaître un certain

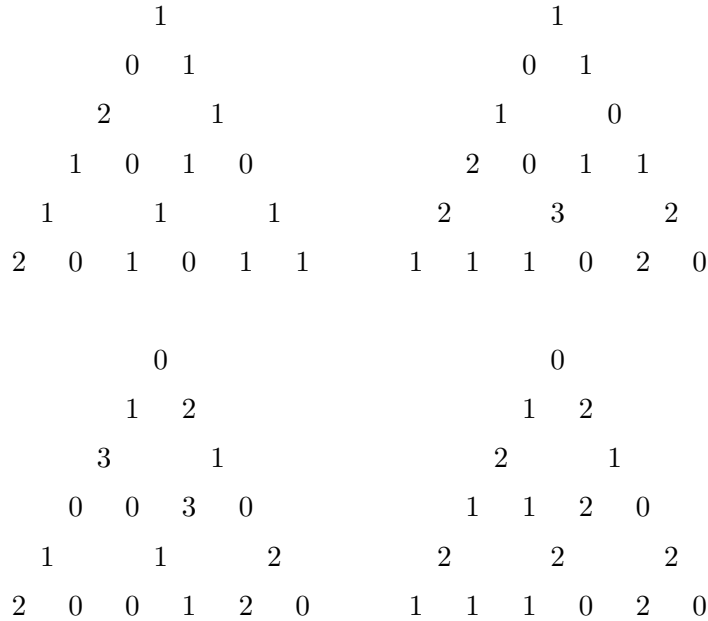


FIG. 4.6 : Triangles de BZ de type $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$.

nombre de symétries des coefficients de LR. On considère \mathfrak{S}_3 vu comme le groupe des symétries du triangle équilatéral : ces symétries induisent une action naturelle de \mathfrak{S}_3 sur

les triangles de BZ. Il est immédiat que si X et Y sont des triangles de BZ de même type, alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont aussi des triangles de BZ, et sont tous les deux de même type.

4.3 Ruches

Ce modèle a été introduit par Knutson et Tao [KT99] dans le but de démontrer une importante conjecture sur les coefficients de LR : la conjecture de saturation. Ils ont dans un premier temps utilisé le modèle des ruches en complément d'un autre (le modèle des alvéoles). Dans la version finale de cet article, les alvéoles seules sont restées et les ruches ont été reléguées en annexe. Buch [Buc00] a toutefois donné une preuve complète de la conjecture de saturation qui utilise uniquement le modèle des ruches.

Le support des ruches est le même triangle que pour les triangles de LR (fig. 4.1). On appelle *losange fondamental* la réunion de deux petits triangles équilatéraux ayant une arête en commun (fig. 4.7). On note H_k l'ensemble des étiquetages $(h_{ij})_{0 \leq i \leq j \leq k}$ du

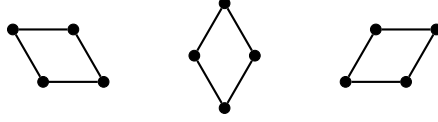


FIG. 4.7 : Losanges fondamentaux.

triangle de taille k par des réels positifs qui vérifient

$$\begin{cases} h_{00} = 0 \\ h_{ij} - h_{ij-1} \geq h_{i-1j} - h_{i-1j-1} \\ h_{i-1j} - h_{i-1j-1} \geq h_{ij+1} - h_{ij} \\ h_{ij} - h_{i-1j} \geq h_{i+1j+1} - h_{ij+1} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Visuellement, les trois dernières inégalités signifient que dans un losange fondamental, la somme des étiquettes des sommets correspondant aux angles obtus est supérieure à la somme des étiquettes correspondant aux angles aigus. On appelle *type* d'une ruche les suites (λ, μ, ν) de réels définis par

$$\begin{cases} \lambda_j = h_{0j} - h_{0j-1} \\ \mu_i = h_{ik} - h_{i-1k} \\ \nu_j = h_{jj} - h_{j-1j-1} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Il découle de (4.3.1) que λ , μ et ν sont des suites décroissantes de longueur k et que $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$. Par exemple,

$$\lambda_j = h_{0j} - h_{0j-1} \geq h_{1j+1} - h_{1j+1} \geq h_{0j+1} - h_{0j} = \lambda_{j+1} \quad (4.3.3)$$

4 Coefficients de LR et polytopes convexes

Par conséquent, si le triangle est étiqueté par des entiers positifs, λ , μ et ν sont bien des partitions qui vérifient $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$. On note $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ l'ensemble des ruches de taille k et de type (λ, μ, ν) : c'est un polytope convexe.

Théorème 4.3.1

Pour tout triplet (λ, μ, ν) de partitions de taille k , l'application ψ définie de T_k dans T_k par

$$h_{ij} = \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^j a_{pq} \quad (4.3.4)$$

induit une bijection de LR_k vers H_k qui envoie $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ sur $H_k(\lambda, \mu, \nu)$. En particulier, $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ contient $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ points entiers.

Démonstration : On appelle E_{ij} le remplissage du triangle de T_k qui contient un 1 à la position (i, j) , et des 0 partout ailleurs. L'ensemble des E_{ij} pour $0 \leq i \leq j \leq k$ et $j > 0$ forme une base canonique de T_k (puisque par convention tous les éléments de T_k vérifient $a_{00} = 0$). On ordonne ces triangles suivant l'ordre lexicographique sur les indices :

$$\mathcal{B} = \{E_{01}, \dots, E_{0k}, E_{11}, \dots, E_{kk}\} \quad (4.3.5)$$

Les images de E_{ij} par la fonction ψ se calculent facilement. On en déduit que la matrice de ψ dans la base \mathcal{B} est triangulaire et de déterminant 1, elle induit donc une bijection de $\mathbb{Z}^{(k+1)(k+2)/2-1}$ vers lui-même. L'inverse de ψ est donné par

$$a_{ij} = \begin{cases} h_{0j} - h_{0j-1} & \text{si } i = 0 \text{ et } 1 \leq j \leq k \\ h_{jj} - h_{j-1j} & \text{si } 1 \leq i \leq k \text{ et } j = i \\ h_{ij} - h_{ij-1} - h_{i-1j-1} & \text{si } 1 \leq i < j \leq k \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Si $A = (a_{ij}) \in LR_k$ et $H = (h_{ij})$ avec $H = \psi(A)$, on a

$$h_{st} - h_{st-1} = \sum_{p=0}^s a_{pt} \quad (4.3.7)$$

et

$$h_{s+1t} - h_{st} = \sum_{q=s+1}^t a_{s+1q} \quad (4.3.8)$$

pour tout $0 \leq s < t \leq k$.

En utilisant ces deux identités, il apparaît que les trois inégalités de (4.3.1) sont vérifiées respectivement quand les a_{ij} sont positifs et quand les deux inégalités (4.1.3) sont satisfaites, ce qui implique que $\psi(LR_k) = H_k$. Ces deux égalités impliquent aussi que A et H ont le même type. Ainsi, on a $\psi(LR_k(\lambda, \mu, \nu)) = H_k(\lambda, \mu, \nu)$. ■

La figure 4.8 montre les ruches qui correspondent aux triangles de LR de la figure 4.3.

4.4 Conjecture de saturation

Si λ , μ et ν sont des partitions de longueur k , on peut voir le triplet (λ, μ, ν) comme un vecteur de \mathbb{Z}^{3k} , cela a donc un sens de parler de la somme de triplets de partitions.

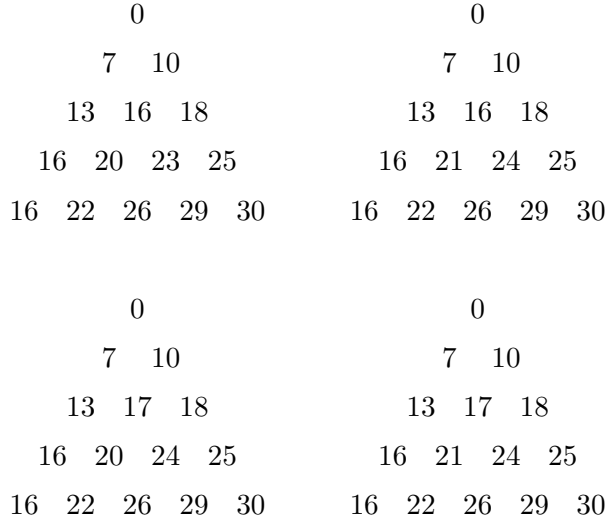


FIG. 4.8 : Ruches de type $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$.

On s'intéresse dans cette section à l'ensemble

$$\mathcal{LR} = \{(\lambda, \mu, \nu), c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0\} \quad (4.4.1)$$

Une première propriété importante de \mathcal{LR} est qu'il est stable par addition. Autrement dit,

$$(c_{\lambda_1, \mu_1}^{\nu_1} > 0 \text{ et } c_{\lambda_2, \mu_2}^{\nu_2} > 0) \Rightarrow c_{\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2}^{\nu_1 + \nu_2} > 0 \quad (4.4.2)$$

On le démontre par exemple en considérant deux triangles de BZ

$$(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \text{ et } (x'_{ij}, y'_{ij}, z'_{ij})$$

de types respectifs $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ (il en existe puisque les coefficients de LR associés sont positifs). Quitte à compléter les partitions par des 0, on peut considérer que ces triangles sont de même taille, on peut donc les superposer et additionner les sommets qui se font face pour construire un nouveau triangle :

$$(x_{ij} + x'_{ij}, y_{ij} + y'_{ij}, z_{ij} + z'_{ij}) \quad (4.4.3)$$

Il découle immédiatement de la définition qu'il s'agit d'un triangle de BZ de type $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \nu_1 + \nu_2)$.

Une conséquence immédiate de cette propriété est la suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0 \Rightarrow c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0 \quad (4.4.4)$$

Le résultat démontré par Knutson et Tao puis par Buch constitue une sorte de réciproque de cette propriété, c'est-à-dire :

Théorème 4.4.1 (*Propriété de saturation*)

Soient λ, μ, ν trois partitions. S'il existe un entier N strictement positif tel que

$$c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$$

alors

$$c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$$

La stratégie de la preuve employée par Buch, inspirée par celle de Knutson et Tao, consiste essentiellement à considérer le polytope $H_k(N\lambda, N\mu, N\nu)$ (qui est non vide puisqu'il contient un point entier), puis à lui appliquer une réduction d'échelle d'un facteur N pour obtenir le polytope $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ qui est donc également non vide. Il conclut en prouvant que si $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ est non vide, alors il contient au moins un point entier.

La preuve de cette conjecture apporte la dernière pierre à une série de travaux visant à caractériser les valeurs propres de la somme $A + B$ de deux matrices hermitiennes en fonction de celles de A et B [Ful00, KT01].

Si A est une matrice $n \times n$ hermitienne, on note ses n valeurs propres (comptées avec multiplicités) par une suite décroissante de réels $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n)$. On définit l'ensemble HE_n par : (α, β, γ) appartient à HE_n si et seulement si il existe trois matrices $n \times n$ hermitiennes A, B, C dont les valeurs propres respectives sont α, β, γ , et telles que $C = A + B$. Déterminer si un triplet (α, β, γ) appartient à HE_n se ramène en définitive à déterminer si certains triplets de partitions (λ, μ, ν) appartiennent à HE_n . Klyachko a alors démontré les faits suivants :

- (a) Si $c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$, alors $(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$.
- (b) Si $(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$, alors il existe un N strictement positif tel que $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$.

La propriété de saturation implique qu'il est possible de prendre $N = 1$ dans (b), et donc que $(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$ si et seulement si $c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$.

Bibliographie

- [Buc00] A. S. BUCH. The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao). *Enseign. Math.* (2000). 46:43–60.
- [BZ88] A. D. BERENSTEIN, A. V. ZELEVINSKY. Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space. *J. Geom. Phys.* (1988). 5(3):453–472.
- [BZ92] A. D. BERENSTEIN, A. V. ZELEVINSKY. Triple multiplicities for $\mathfrak{sl}(r + 1)$ and the spectrum of the exterior algebra of the adjoint representation. *J. Algebraic Comb.* (1992). 1(1):7–22.
- [FH91] W. FULTON, J. HARRIS. *Representation Theory: a First Course* (Springer Verlag, 1991).
- [Ful96] W. FULTON. *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [Ful00] W. FULTON. Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.* (2000). 37:209–249.
- [GW99] R. GOODMAN, N. R. WALLACH. *Representations and Invariants of the Classical Groups* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [Knu70] D. E. KNUTH. Permutations, matrices and generalized young tableaux. *Pacific J. of Math.* (1970). 34:709–727.
- [KT99] A. KNUTSON, T. TAO. The honeycomb model of $GL(n)$ tensor products I: proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* (1999). 12:1055–1090.
- [KT01] A. KNUTSON, T. TAO. Honeycombs and sums of Hermitian matrices. *Notices Amer. Math. Soc.* (2001). 48:175–186.
- [LR34] D. E. LITTLEWOOD, A. R. RICHARDSON. Group characters and algebra. *Philos. Trans. Royal Soc. A* (1934). 233:99–141.
- [LS81] A. LASCoux, M. P. SCHÜTZENBERGER. Le monoïde plaxique. *Quad. Ric. Sci.* (1981). 109:129–156.

Bibliographie

- [PV05] I. PAK, E. VALLEJO. Combinatorics and geometry of Littlewood-Richardson cones. *Eur. J. Comb.* (**2005**). 26(6):995–1008.
- [Rob38] G. DE. B. ROBINSON. On the representations of the symmetric group. *American J. of Math.* (**1938**). 60:745–760.
- [Sch61] C. SCHENSTED. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. of Math.* (**1961**). 13:178–191.
- [vL01] M. A. A. VAN LEEUWEN. The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics. *MSJ Mem.* (**2001**). 11:95–145.