Présentation: TFT's et théorie des représentations

Adrien Brochier

IMJ-PRG

24 Septembre 2018

Moi moi moi !

- Grandi à Lyon

Moi moi moi !

- Grandi à Lyon
- Détours à Heidelberg et Caen

Moi moi moi !

- Grandi à Lyon
- Détours à Heidelberg et Caen
- Thèse à l'IRMA, Strasbourg sous la direction de B. Enriquez (2011)

Moi moi moi !

- Grandi à Lyon
- Détours à Heidelberg et Caen
- Thèse à l'IRMA, Strasbourg sous la direction de B. Enriquez (2011)
- Postdocs à Genève, Edimbourg, Bonn et Hambourg

Moi moi moi !

- Grandi à Lyon
- Détours à Heidelberg et Caen
- Thèse à l'IRMA, Strasbourg sous la direction de B. Enriquez (2011)
- Postdocs à Genève, Edimbourg, Bonn et Hambourg
- Membre de l'équipe GRG.

Thématiques de recherche

- Dictionnaire entre :

Thématiques de recherche

- Dictionnaire entre :
  - invariants de nœuds, tresses et variétés de petite dimension qui sont « fonctoriels », c'est-à-dire compatibles avec découpages et recollements

Thématiques de recherche

- Dictionnaire entre :
  - invariants de nœuds, tresses et variétés de petite dimension qui sont « fonctoriels », c'est-à-dire compatibles avec découpages et recollements
  - structures algébriques et catégoriques en théorie des représentations, quantification par déformation et algèbre quantique.

Thématiques de recherche

- Dictionnaire entre :
  - invariants de nœuds, tresses et variétés de petite dimension qui sont « fonctoriels », c'est-à-dire compatibles avec découpages et recollements
  - structures algébriques et catégoriques en théorie des représentations, quantification par déformation et algèbre quantique.
- Inspiré par les théories conformes et quantiques des champs en physique $\rightsquigarrow$ théories topologiques des champs (TFT).

Thématiques de recherche

- Dictionnaire entre :
  - invariants de nœuds, tresses et variétés de petite dimension qui sont « fonctoriels », c'est-à-dire compatibles avec découpages et recollements
  - structures algébriques et catégoriques en théorie des représentations, quantification par déformation et algèbre quantique.
- Inspiré par les théories conformes et quantiques des champs en physique $\rightsquigarrow$ théories topologiques des champs (TFT).
- Motivation originale : invariants (en général numériques) faciles à calculer et avec de bonnes propriétés.

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :
    - une action du mapping class group de M

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :
  - une action du mapping class group de M
  - des présentations combinatoires de F en termes d'objets plus simples, en découpant M en morceaux

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :
  - une action du mapping class group de M
  - des présentations combinatoires de F en termes d'objets plus simples, en découpant M en morceaux
  - des généralisations possibles de F en évaluant Z sur d'autres variétés, ou d'autre TFT sur M, et des tas de relations entre tout ça.

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :
  - une action du mapping class group de M
  - des présentations combinatoires de F en termes d'objets plus simples, en découpant M en morceaux
  - des généralisations possibles de F en évaluant Z sur d'autres variétés, ou d'autre TFT sur M, et des tas de relations entre tout ça.
  - etc. . .

Thématiques de recherche

- Je m'intéresse plutôt à la direction inverse : utiliser la topologie pour démontrer/construire des choses.
- En obtenant son objet mathématique favori F comme la valeur d'une TFT Z sur une variété bien choisie M, on a gratuitement :
  - une action du mapping class group de M
  - des présentations combinatoires de F en termes d'objets plus simples, en découpant M en morceaux
  - des généralisations possibles de F en évaluant Z sur d'autres variétés, ou d'autre TFT sur M, et des tas de relations entre tout ça.
  - etc...
- Depuis quelques années, j'ai principalement travaillé (avec D. Ben–Zvi, D. Jordan et N. Snyder) à la construction d'une certaine TFT en dimension 3 qui « explique » et généralise un certain nombre de constructions en algèbre quantique, et leurs relations avec la théorie skein.

Exemple de TFT : variété des caractères

Définition

Soit G un groupe algébrique simple sur $\mathbb{C}$ $(GL_n, SL_n, \ldots)$, X une variété topologique, la variété des caractères est

$$\mathrm{CH}(S) := R(X)/G$$

où

$$R(X) := \{\pi_1(X) \to G\}.$$

Exemple de TFT : variété des caractères

Définition

Soit G un groupe algébrique simple sur $\mathbb{C}$ ($GL_n, SL_n, \ldots$), X une variété topologique, la variété des caractères est

$$\mathrm{CH}(S) := R(X)/G$$

où

$$R(X) := \{\pi_1(X) \to G\}.$$

- Pour les surfaces : structure de Poisson canonique d'Atiyah–Bott et Goldman, invariante par difféo et qui distingue les surfaces.

Exemple de TFT : variété des caractères

Définition

Soit G un groupe algébrique simple sur $\mathbb{C}$ ($GL_n, SL_n, \dots$), X une variété topologique, la variété des caractères est

$$\mathrm{CH}(S) := R(X)/G$$

où

$$R(X) := \{\pi_1(X) \to G\}.$$

- Pour les surfaces : structure de Poisson canonique d'Atiyah–Bott et Goldman, invariante par difféo et qui distingue les surfaces.
- Pour les 3-variétés : l'image de $\mathrm{CH}(X)$ est une sous-variété Lagrangienne dans $\mathrm{CH}(\partial X)$.

Exemple de TFT : variété des caractères

Définition

Soit G un groupe algébrique simple sur $\mathbb{C}$ $(GL_n, SL_n, \dots)$, X une variété topologique, la variété des caractères est

$$\mathrm{CH}(S) := R(X)/G$$

où

$$R(X) := \{\pi_1(X) \to G\}.$$

- Pour les surfaces : structure de Poisson canonique d'Atiyah–Bott et Goldman, invariante par difféo et qui distingue les surfaces.
- Pour les 3-variétés : l'image de $\mathrm{CH}(X)$ est une sous-variété Lagrangienne dans $\mathrm{CH}(\partial X)$.
- Invariant de nœud $K \mapsto \mathrm{CH}(S^3 \backslash K) \subset \mathrm{CH}(T^2)$ (Pour SL_2, c'est le polynôme A).

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
    - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
    - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
    - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
  - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
  - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)
  - modules de skein des 3-variétés (Kauffmann,...)

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
    - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
    - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)
    - modules de skein des 3-variétés (Kauffmann,...)
    - calcule la monodromie des équations KZ en CFT/intégrale de Kontsevich (Kohno, Drinfeld, Kazhdan–Lusztig).

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
  - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
  - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)
  - modules de skein des 3-variétés (Kauffmann,...)
  - calcule la monodromie des équations KZ en CFT/intégrale de Kontsevich (Kohno, Drinfeld, Kazhdan–Lusztig).

Questions

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
  - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
  - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)
  - modules de skein des 3-variétés (Kauffmann,. . .)
  - calcule la monodromie des équations KZ en CFT/intégrale de Kontsevich (Kohno, Drinfeld, Kazhdan–Lusztig).

Questions

1. Analogue de $\mathrm{Rep}_q\, G$ pour les surfaces.

Quantification

- Rep $G \simeq$ faisceaux sur $\mathrm{CH}(D^2)$.
- $\mathrm{Rep}_q\, G, q \in \mathbb{C}^\times$: modules sur le groupe quantique associé à G
  - déformation de la structure de Poisson sur $\mathrm{CH}(D^2)$
  - reps. des groupes de tresses, invariants d'entrelacs (Reshetikhin–Turaev)
  - modules de skein des 3-variétés (Kauffmann,...)
  - calcule la monodromie des équations KZ en CFT/intégrale de Kontsevich (Kohno, Drinfeld, Kazhdan–Lusztig).

Questions

1. Analogue de $\mathrm{Rep}_q\, G$ pour les surfaces.
2. Quantification du polynôme A.

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$
- *à une surface associe une déformation canonique de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{CH}(S)$

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$
- *à une surface associe une déformation canonique de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{CH}(S)$
- *aux 3-variétés associe les modules de skein et leurs versions relatives.*

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$
- *à une surface associe une déformation canonique de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{CH}(S)$
- *aux 3-variétés associe les modules de skein et leurs versions relatives.*

- Décomposition combinatoire des surfaces $\rightsquigarrow$ calcul explicite via des algèbres quantiques bien connues.

Principal résultat

Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$
- *à une surface associe une déformation canonique de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{CH}(S)$
- *aux 3-variétés associe les modules de skein et leurs versions relatives.*

- Décomposition combinatoire des surfaces $\rightsquigarrow$ calcul explicite via des algèbres quantiques bien connues.
- Quantifications canoniques des ces structures de Poisson/Lagrangiennes qui préservent automatiquement l'invariance topologique.

Principal résultat

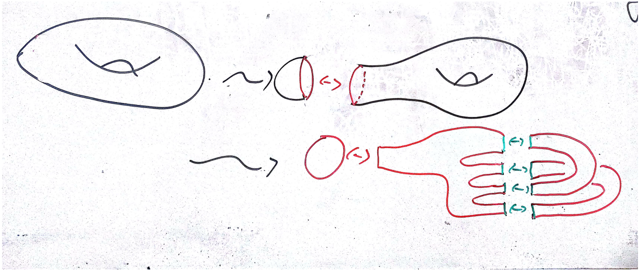
Théorème (Ben-Zvi–B–Jordan, B-Jordan–Snyder)

Il existe une TFT en dimension 3 qui :

- *au disque associe* $\mathrm{Rep}_q\, G$
- *à une surface associe une déformation canonique de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{CH}(S)$
- *aux 3-variétés associe les modules de skein et leurs versions relatives.*

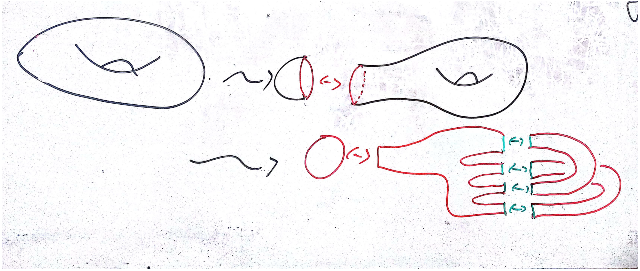
- Décomposition combinatoire des surfaces $\rightsquigarrow$ calcul explicite via des algèbres quantiques bien connues.
- Quantifications canoniques des ces structures de Poisson/Lagrangiennes qui préservent automatiquement l'invariance topologique.
- Nouvelles reps. des groupes de mapping class et de tresses des surfaces, et nouveaux invariants d'entrelacs dans les surfaces épaissies.

Exemple



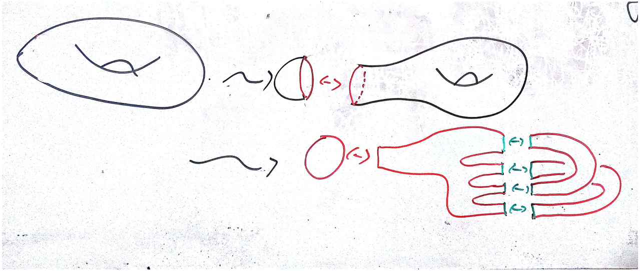
- Pour le tore $\rightsquigarrow$ une version quantique des D-modules sur G/G ($\simeq$ équations q-différentielles).

Exemple



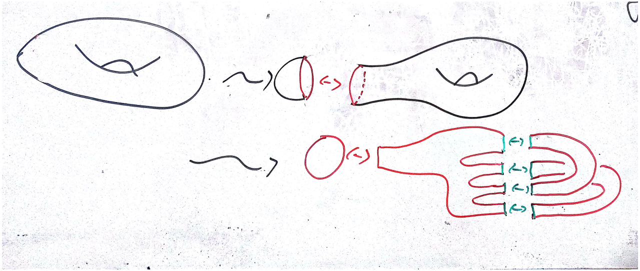
- Pour le tore $\rightsquigarrow$ une version quantique des D-modules sur G/G ($\simeq$ équations q-différentielles).
- Important en théorie géométrique des représentations, lié à l'algèbre de Hecke double affine de Cherednik (Varagnolo–Vasserot).

Exemple



- Pour le tore $\rightsquigarrow$ une version quantique des D-modules sur G/G ($\simeq$ équations q-différentielles).
- Important en théorie géométrique des représentations, lié à l'algèbre de Hecke double affine de Cherednik (Varagnolo–Vasserot).
- Action du MCG $\rightsquigarrow$ transformée de Fourier.

Exemple



- Pour le tore $\rightsquigarrow$ une version quantique des D-modules sur G/G ($\simeq$ équations q-différentielles).
- Important en théorie géométrique des représentations, lié à l'algèbre de Hecke double affine de Cherednik (Varagnolo–Vasserot).
- Action du MCG $\rightsquigarrow$ transformée de Fourier.
- Complément d'un nœud dans S^3 $\rightsquigarrow$ quantification du polynôme A.

Merci de votre attention !