

# Produits tensoriels de représentations de $GL(E)$ et coefficients de Littlewood-Richardson

Stage de Master 2

Adrien Brochier

Université de Caen Basse-Normandie

14 Juin 2007



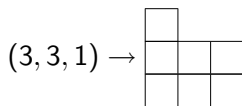
- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson
- 4 Polytopes convexes
- 5 Conjecture de saturation

- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson
- 4 Polytopes convexes
- 5 Conjecture de saturation

- **Partition** d'un entier  $n$  : suite finie  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  d'entiers positifs tels que

$$\sum \lambda_i = n$$

- **Diagramme de Ferrer** : représentation graphique d'une partition. Les  $\lambda_i$  correspondent aux lignes du diagramme.



- **Tabloïde** de forme  $\lambda$  à valeurs dans  $[m]$  : remplissage du diagramme  $\lambda$  par des entiers compris entre 1 et  $m$ .

2		
1	3	1
4	4	4

- **Tableau de Young** : tabloïde dont les lignes sont croissantes et les colonnes strictement croissantes.

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

- Le **contenu** d'un tabloïde  $t$  est la suite  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  où  $\mu_i$  est le nombre d'occurrences de  $i$  dans  $t$ .
- le **mot de lecture** d'un tableau est le mot obtenu en lisant successivement les lignes du tableau.

$$w(t) = 4234122$$

- On utilise les tabloïdes pour représenter des polynômes de  $\mathbb{C}[X_{i,j} | 1 \leq i, j, \leq m]$  formés par des produits de mineurs de la matrice

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m,1} & \dots & X_{m,m} \end{pmatrix}$$

- À une colonne constituée des entiers  $j_1, \dots, j_p$ , on associe le mineur formé sur les  $p$  premiers éléments des colonnes de la matrice indexés par les  $j_j$ .
- À un tabloïde quelconque, on associe le produit des mineurs correspondants à ses colonnes.

# Exemple

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,4} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,4} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,4} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_{1,2} & X_{1,3} \\ X_{2,2} & X_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$= (X_{1,2}X_{2,3} - X_{1,3}X_{2,2}) \\ [X_{1,1}X_{2,2}X_{3,4} - X_{1,2}X_{2,1}X_{3,4} - X_{1,1}X_{2,4}X_{3,2} \\ + X_{1,4}X_{2,1}X_{3,2} + X_{1,2}X_{2,4}X_{3,1} - X_{1,4}X_{2,2}X_{3,1}]$$

- Le **module de Schur**  $E^\lambda$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par les tabloïdes de forme  $\lambda$  et à valeurs dans  $[1..m]$ , où  $m = \dim(E)$ .
- Le groupe  $GL_m(\mathbb{C})$  agit sur  $\mathbb{C}[X_{i,j}]$  par multiplication matricielle :

$$\forall g \in GL_m(\mathbb{C}), \forall P \in \mathbb{C}[X_{i,j}], (g \cdot P)(X) = P(X \cdot g)$$

- Les  $E^\lambda$  sont stables sous cette action.

## Théorème

*Une base de  $E^\lambda$  est formée par les tableaux de Young de forme  $\lambda$ . Les modules de Schur sont exactement les représentations polynomiales irréductibles de  $GL(E)$ .*



## Théorème

*Toute représentation polynomiale de  $GL(E)$  est complètement réductible.*

- Vrai en particulier pour le produit tensoriel de deux modules de Schur.

$$E^\lambda \otimes E^\mu = \bigoplus_{\nu} (E^\nu)^{c_{\lambda,\mu}^\nu}$$

- Problème : calculer les  $c_{\lambda,\mu}^\nu$ .
- Ce problème peut se traiter au niveau des caractères des modules de Schur.

- $t$  tableau à valeur dans  $[m]$  de contenu  $\alpha$  :

$$x^t = \prod x_i^{\alpha_i} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$$

- Soit  $T_\lambda$  l'ensemble des tableaux à valeur dans  $[m]$  et de forme  $\lambda$ . Le caractère de la représentation  $E^\lambda$  est le **polynôme de Schur**

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{t \in T_\lambda} x^t$$

## Problème

Trouver un algorithme pour décomposer un produit  $s_\lambda \times s_\mu$  sur la base des polynômes de Schur.

# Exemple

- $\dim(E) = 3$ ,  $\lambda = (2, 1)$ .

2		2		3		3	
1	1	1	2	1	1	1	2
3		3		3		2	
2	2	1	3	2	3	1	3

- $E^{(2,1)}$  est donc de degré 8. Son caractère est

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2$$

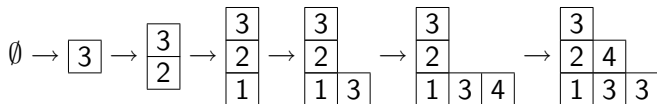
- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson
- 4 Polytopes convexes
- 5 Conjecture de saturation

On pose  $\mathcal{A} = [m]$ .

## Schensted

Algorithme pour associer un tableau à chaque mot de  $\mathcal{A}^*$ .

- Exemple : 321343



- Cet algorithme induit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{A}^*$  pour laquelle les tableaux forment un système de représentants.

## Knuth

Règles de réécriture sur  $\mathcal{A}^*$  à partir de l'étude de la relation de Schensted.

- $v \cdot zxy \cdot w \leftrightarrow v \cdot xzy \cdot w$  si  $x \leq y < z$
- $v \cdot yzx \cdot w \leftrightarrow v \cdot yxz \cdot w$  si  $x < y \leq z$

## Théorème

*La clôture de congruence des règles de Knuth coïncide avec la relation de Schensted.*

## Lascoux, Schützenberger

Étudient le monoïde obtenu en quotientant  $\mathcal{A}^*$  par les relations de Knuth : le **monoïde plaxique**.

- Structure de monoïde sur les tableaux.
- Algorithme de Schensted  $\rightarrow$  multiplication effective.
- Monoïde non commutatif, non simplifiable.

## Propriétés

$t, t', s$  tableaux de forme  $\lambda, \mu, \nu$ .

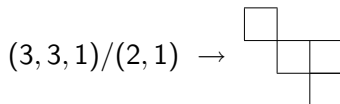
Si  $s = t \star t'$  :

- $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$
- $\lambda \subset \nu$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \star \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

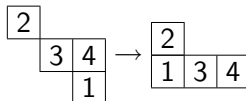
# Tableaux gauches et jeu de taquin

Si  $\lambda \subset \nu$  sont deux diagrammes, on appelle diagramme gauche  $\nu/\lambda$  la différence ensembliste entre ces deux diagrammes.



## Algorithme du jeu de taquin

Faire coulisser les cases pour combler l'espace vide et obtenir un tableau : le **redressé** du tableau gauche.



L'algorithme du jeu de taquin est compatible avec les relations de Knuth.



- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson**
- 4 Polytopes convexes
- 5 Conjecture de saturation

# Analogie plaxique des polynômes de Schur

- Algèbre plaxique  $R[m]$  :  $\mathbb{Z}$ -algèbre de monoïde engendrée par les tableaux à valeurs dans  $[m]$ . La multiplication est induite par la loi de composition du monoïde plaxique.
- On pose

$$S_\lambda = \sum_{t \in T_\lambda} t$$

- L'application

$$\begin{array}{ccc} \pi : R[m] & \longmapsto & \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \\ t & \longrightarrow & x^t \end{array}$$

est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -module qui envoie  $S_\lambda$  sur le polynôme de Schur  $s_\lambda$ . On vérifie facilement que c'est aussi un homomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -algèbre.



# Théorème fondamental

- Soient  $\lambda, \mu, \nu$  trois partitions et  $U_0$  et  $V_0$  deux tableaux de formes  $\mu$  et  $\nu$ .
- $\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$  : ensemble des tableaux  $(t, t')$  de forme  $(\lambda, \mu)$  tels que  $V_0 = t \star t'$ .
- $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$  : ensemble des tableaux gauches de forme  $\nu/\lambda$  dont le redressé est  $U_0$ .

## Théorème

$$\#\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) = \#\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$$

## Conséquence

$\#\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$  ne dépend que de  $\lambda, \mu, \nu$

# Règle de Littlewood-Richardson

- On définit le coefficient de Littlewood-Richardson

$$c_{\lambda, \mu}^{\nu} = \#\mathcal{T}(\lambda, \mu, U_0)$$

- Dans le produit  $S_{\lambda} \times S_{\mu}$ , tout tableau de forme  $\nu$  apparaît avec le même coefficient  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ .

## Théorème

Dans  $R[m]$  :

$$S_{\lambda} \times S_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} S_{\nu}$$

## Corollaire (Règle de LR)

Dans  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  :

$$s_{\lambda} \times s_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} s_{\nu}$$

Ainsi, les coefficients de LR sont exactement les multiplicités de  $E^{\lambda} \otimes E^{\mu}$ .



# Tableaux gauches de Littlewood-Richardson

- Un mot de Yamanouchi est un mot  $w = w_1 \dots w_k$  qui vérifie : pour tout  $1 \leq r \leq k$ , le mot  $w_k w_{k-1} \dots w_r$  contient au moins autant de lettres  $i$  que de lettres  $i + 1$ .
- 323121 en est un, mais pas 233121.
- Un tableau gauche de Littlewood-Richardson est un tableau gauche dont le mot de lecture est de Yamanouchi.

## Remarque

Un tableau gauche de forme  $\nu/\lambda$  et de contenu  $\mu$  est de LR ssi son redressé est le tableau  $U(\mu)$  dont la  $i$ -ième ligne est constituée de  $\mu_i$  lettres  $i$ .

## Théorème

*Le nombre de tableaux de LR de forme  $\nu/\lambda$  et de contenu  $\mu$  est le cardinal de  $\#\mathcal{S}(\nu/\lambda, U(\mu))$ , c'est à dire  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ .*



# Exemple

- Tableaux de LR de forme  $(10, 8, 7, 5)/(7, 6, 3)$  et de contenu  $(6, 4, 3, 1)$  :

1	1	2	3	4					
		1	2	3	3				
				2	2				
					1	1	1		

1	2	3	3	4					
		1	1	2	3				
				2	2				
					1	1	1		

1	1	3	3	4					
		2	2	2	3				
				1	2				
					1	1	1		

1	2	3	3	4					
		1	2	2	3				
				1	2				
					1	1	1		

- On a donc  $c_{(7,6,3),(6,4,3,1)}^{(10,8,7,5)} = 4$ .

- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson
- 4 Polytopes convexes**
- 5 Conjecture de saturation

## Idée

Exprimer les coefficients de Littlewood-Richardson en terme de nombre de points entiers dans un polytope convexe

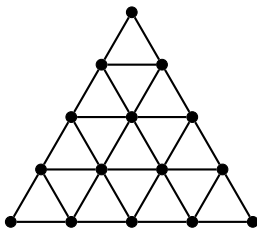
- Fait apparaître plus clairement des propriétés et symétries des coefficients de LR.
- Permet de s'abstraire du langage des tableaux, et offre donc des possibilités de généralisation à la représentation d'autres groupes.
- Cadre plus général : outils mathématiques supplémentaires, intérêt algorithmique.



- Une ligne  $j$  d'un tableau gauche de LR de forme  $\nu/\lambda$  et de contenu  $\mu$  est déterminée par :
  - Le nombre de "cases vides", c'est-à-dire  $\lambda_j$ .
  - Le nombre d'occurrences de chaque lettre.
- Dans un tableau gauche de LR, la lettre  $j$  ne peut apparaître qu'à partir de la ligne  $j$ .
- Une ligne  $j$  est donc déterminée par la donnée de  $j + 1$  coefficients

$$\begin{cases} a_{0j} = \lambda_j \\ a_{ij} \text{ est le nombre de } i \text{ dans la ligne } j, \text{ pour } 1 \leq i \leq j \end{cases}$$

- $T_k$  :  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\{a_{ij} \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq j \leq k, a_{00} = 0\}$ .
- Les  $a_{ij}$  sont disposés en triangle :



$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & a_{00} \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_{01} & a_{11} \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_{02} & a_{12} & a_{22} \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}$$

- Ensemble  $LR_k$  des triangles de Littlewood-Richardson : sous ensemble de  $T_k$  tels que les  $a_{ij}$  sont positifs et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{i-1} a_{pj} \geq \sum_{p=0}^i a_{pj+1} \\ \sum_{q=i}^j a_{iq} \geq \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1q} \end{array} \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq k \right.$$

- Le **type** d'un élément de  $LR_k$  est

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j = a_{0j} \\ \nu_j = \sum_{p=0}^j a_{pj} \\ \mu_i = \sum_{q=i}^k a_{iq} \end{array} \quad \forall 1 \leq j \leq k \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} \forall 1 \leq j \leq k \\ \forall 1 \leq i \leq k \end{array} \right.$$

- $(\lambda, \mu, \nu)$  des partitions : l'ensemble  $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$  des triangles de LR de type  $(\lambda, \mu, \nu)$  est un polytope convexe.
- L'application

$$\begin{cases} a_{0j} = \lambda_j \\ a_{ij} \text{ est le nombre de } i \text{ dans la ligne } j, \text{ pour } 1 \leq i \leq j \end{cases}$$

est une bijection de l'ensemble des tableaux gauches de LR de forme  $\nu/\lambda$  et de contenu  $\mu$  vers les points entiers de  $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$ .

## Théorème

$LR_k(\lambda, \mu, \nu)$  contient  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$  points entiers.

# Exemple

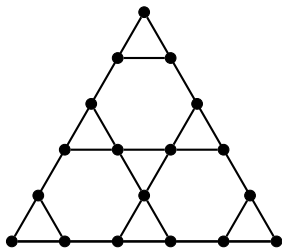
Triangles de LR de type  $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$

		0						0				
		7	3					7	3			
		6	0	2				6	0	2		
		3	1	1	2			3	2	1	1	
	0	2	1	1	1			0	1	1	2	1

		0						0				
		7	3					7	3			
		6	1	1				6	1	1		
		3	0	3	1			3	1	2	1	
	0	2	0	2	1			0	1	1	2	1

# Triangles de Berenstein-Zelevinsky

- Première expression des  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$  en termes de points entiers dans un polytope.
- Juxtaposition de trois triangles  $(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ .



$$\begin{array}{cccccc} & & & & & x_{11} \\ & & & & & y_{11} & z_{11} \\ & & & & & x_{12} & & x_{22} \\ & & & & & y_{12} & z_{12} & y_{22} & z_{22} \\ & & & & & x_{13} & & x_{23} & & x_{33} \\ & & & & & y_{13} & z_{13} & y_{23} & z_{23} & y_{33} & z_{33} \end{array}$$

# Triangles de Berenstein-Zelevinsky

- Un triangle de Berenstein-Zelevinsky est un étiquetage par des réels positifs  $(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  qui vérifient

$$\begin{cases} y_{ij} + z_{ij} = y_{i+1j+1} + z_{ij+1} \\ x_{ij+1} + y_{ij} = x_{i+1j+1} + y_{i+1j+1} \\ x_{ij+1} + z_{ij+1} = x_{i+1j+1} + z_{ij} \end{cases}$$

- Visuellement : les sommes des sommets de deux arêtes opposées dans un hexagone sont égales.
- Un triangle de BZ est de type  $(\lambda, \mu, \nu)$  si

$$\begin{cases} x_{1j} + y_{1j} = \lambda_j - \lambda_{j+1} \\ x_{jj} + z_{jj} = \nu_j - \nu_{j+1} \\ y_{ik} + z_{ik} = \mu_i - \mu_{i+1} \end{cases}$$

- Type  $\rightarrow$  plus adapté aux représentations de  $SL_n(\mathbb{C})$ .



# Triangles de Berenstein-Zelevinsky

- $BZ_k(\lambda, \mu, \nu)$  : ensemble des triangles de BZ de taille  $k$  et de type  $(\lambda, \mu, \nu)$ . C'est un polytope convexe.
- L'application définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = \sum_{p=0}^{i-1} a_{pj} - \sum_{p=0}^i a_{pj+1} \\ y_{ij} = a_{i,j+1} \\ z_{ij} = \sum_{q=i}^j a_{iq} - \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1q} \end{array} \right.$$

est une surjection de  $LR_k$  vers  $BZ_{k-1}$ , et une bijection de  $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$  vers  $BZ_{k-1}(\lambda, \mu, \nu)$ .





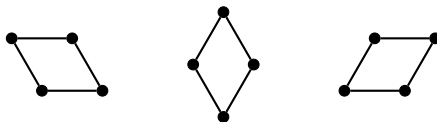
# Exemple

Triangles de BZ de type  $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$ .

		1						1					
		0	1					0	1				
		2		1				1		0			
	1	0	1	0				2	0	1	1		
	1		1		1			2		3		2	
2	0	1	0	1	1			1	1	1	0	2	0

			0							0				
		1	2						1	2				
		3		1					2		1			
	0	0	3	0					1	1	2	0		
	1		1		2				2		2		2	
2	0	0	1	2	0				1	1	1	0	2	0

- Le modèle des ruches a été imaginé par Knutson et Tao.
- Étiquetage du même triangle que les triangles de LR par des réels  $h_{ij}$ .
- On appelle **losange fondamental** la réunion de deux petits triangles avec une arête commune.



- Une ruche correspond à un étiquetage du triangle par des réels positifs  $h_{ij}$  qui vérifient

$$\begin{cases} h_{00} = 0 \\ h_{ij} - h_{ij-1} \geq h_{i-1j} - h_{i-1j-1} \\ h_{i-1j} - h_{i-1j-1} \geq h_{ij+1} - h_{ij} \\ h_{ij} - h_{i-1j} \geq h_{i+1j+1} - h_{ij+1} \end{cases}$$

- Dans un losange fondamental, la somme des sommets des angles obtus est supérieure à la somme des sommets des angles aigus.
- Le type d'une ruche est

$$\begin{cases} \lambda_j = h_{0j} - h_{0j-1} \\ \mu_i = h_{ik} - h_{i-1k} \\ \nu_j = h_{jj} - h_{j-1j-1} \end{cases}$$

- $H_k(\lambda, \mu, \nu)$  : ensemble des ruches de taille  $k$  et de type  $(\lambda, \mu, \nu)$ . C'est un polytope convexe.
- L'application de  $T_k$  dans lui-même définie par

$$h_{ij} = \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^j a_{pq}$$

est une bijection de  $LR_k$  vers  $H_k$ , et une bijection de  $LR_k(\lambda, \mu, \nu)$  vers  $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ .

# Exemple

Ruches de type  $((7, 6, 3), (6, 4, 3, 1), (10, 8, 7, 5))$

0					0				
7	10				7	10			
13	16	18			13	16	18		
16	20	23	25		16	21	24	25	
16	22	26	29	30	16	22	26	29	30

0					0				
7	10				7	10			
13	17	18			13	17	18		
16	20	24	25		16	21	24	25	
16	22	26	29	30	16	22	26	29	30

- 1 Représentations polynomiales de  $GL(E)$
- 2 Combinatoire des tableaux
- 3 Règle de Littlewood-Richardson
- 4 Polytopes convexes
- 5 Conjecture de saturation

- Question naturelle : mieux connaître l'ensemble :

$$\mathcal{LR} = \{(\lambda, \mu, \nu), c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0\}$$

- $\mathcal{LR}$  est stable par addition : c'est un monoïde.
- Cette propriété est rendue évidente par les triangles de BZ.
- En particulier

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0 \Rightarrow c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$$

- Elle a été démontrée par Knutson et Tao, puis Buch en a donné une preuve plus courte en utilisant les ruches.

## Théorème

*Soient  $\lambda, \mu, \nu$  trois partitions. S'il existe un entier  $N$  strictement positif tel que  $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$ , alors  $c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$ .*

- Idées de la preuve :
  - Considérer le polytope  $H_k(N\lambda, N\mu, N\nu)$ , non vide puisqu'il contient un point entier.
  - Appliquer une réduction d'échelle pour trouver  $H_k(\lambda, \mu, \nu)$ , qui est donc également non vide.
  - Prouver qu'un polytope  $H_k(\lambda, \mu, \nu)$  non vide contient un point entier.



## Question

Étant données 3 suites décroissantes de  $n$  réels  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , existe-t-il 3 matrices  $n \times n$  hermitiennes  $A + B = C$  dont les valeurs propres respectives sont  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ?

- On note  $HE_n$  l'ensemble des triplets qui vérifient cette propriété.
- Il y a eu de nombreux travaux pour répondre à cette question, à la suite d'une conjecture de Horn.
- Ce problème se ramène en définitive à caractériser les triplets de partitions  $(\lambda, \mu, \nu)$  qui appartiennent à  $HE_n$ .

- Klyachko a montré que :
  - ① Si  $c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$ , alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$ .
  - ② Si  $(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$ , alors il existe un  $N$  strictement positif tel que  $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$ .
- La conjecture de saturation implique qu'il est possible de prendre  $N = 1$  dans (2), c'est à dire :

## Théorème

$(\lambda, \mu, \nu) \in HE_n$  si et seulement si  $c_{\lambda, \mu}^{\nu} > 0$ .

Je vous remercie de votre attention.