Feuille d'exercices 9

Exercice 1 $k = -1$ fait en cours, les autres cas sont similaires.

Exercice 2 Si x est pair, alors $x^3 = 0 \mod 8$ et donc $y^2 = -2 \mod 8$. Or, -2 n'est pas un carré modulo 8 donc c'est impossible. Donc x est impair, et donc y aussi. On factorise ensuite dans $A = \mathbb{Z}[\omega]$ où $\omega = i\sqrt{2}$.

$$x^3 = (y + \omega)(y - \omega).$$

Soit d un diviseur commun aux deux facteurs de droite. Alors d divise leur différence, càd 2ω, et donc la norme de d divise $N()2\omega) = 8$. Par définition, $N(d)$ divise aussi $N(y+\omega) = y^2+2$ qui est imapir. Donc $N(d) = 1$, et donc $y+\omega$ et $y-\omega$ sont premiers entre eux. Puisque A est factoriel (puisque Euclidien) on en déduit que chaque $y \pm \omega$ est le produit d'une unité et d'un cube. Puisque les unités dans A sont ± 1, qui sont des cubes, on en déduit que $y \pm \omega$ est un cube. On pose

$$y + \omega = (a + b\omega)^3$$

pour $a; b \in \mathbb{Z}$, et on développe. On en déduit :

$$y = a(a^2 - 6b^2) \qquad\qquad 1 = b(3a^2 - 2b^2).$$

La seconde équation force $b = \pm 1$. En remplaçant toujours dans la second équation par $b = 1$, on trouve $a = \pm 1$ et finalement $y = \pm 5$, et $x = 3$. Si $b = -1$, la seconde équation nous donne $1 = 3a^2$ qu n'a pas de solution.

Exercice 3 On se propose de montrer que les $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $y^2 + y = x^3 - 2$ sont exactement $(x, y) = (2, 2)$ ou $(x, y) = (2, -3)$.

1. $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ est Euclidien donc un élément est premier ssi il est irréductible.
2. On remarque que $y^2 + y + 2 = (y + \alpha)(y + \bar{\alpha})$. Donc si $\sqrt{-7}$ divise $y + \alpha$ et si (x, y) est solution de notre équation, alors $\sqrt{-7}$ divise aussi x^3, et puisque il est premier il divise aussi x, absurde.
3. De même que dans l'exo précédent, on en déduit que $y + \alpha$ est un cube. On pose $y = (a + b\alpha)^3$, on développe et on conclut.

Exercice 4 Pour la première : si y est pair, alors comme dans l'exo 2 on en déduit $x^2 = -1 \mod 8$, contradiction. Donc y est impair, donc x est pair. On factorise dans l'anneau :

$$y^3 = (x + i)(x - i).$$

Soit d un diviseur commun de $x \pm i$. d divise donc leur différence, $2i$, et donc $N(d)$ divise $N(2i) = 4$. Mais $N(d)$ divise aussi $N(x + i) = x^2 + 1 = y^3$ qui est impair. Donc $N(d) = 1$, donc les $x \pm i$ sont premiers entre eux. Donc $y + i$ est le produit d'une unité et d'un cube. Par ailleurs, les unités dans $\mathbb{Z}[i]$ sont ± 1 et $\pm i$ qui sont tous des cubes. On en déduit que $y + i$ est un cube. On pose

$$y + i = (a + ib)^3$$

pour $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ et on développe. On en déduit $b = \pm 1$. Si $b = 1$ on vérifie qu'il n'y a pas de solutions, et le cas $b = -1$ force $a = O$, donc $x = 0$ et $y = 1$.

La secone équation est plus compliquée qu'elle n'en a l'air. Voir par exemple : `https://mathoverflow.net/q/39561/13552`.