Université Paris 7 - Denis Diderot | 2017-2018
UFR de Mathématiques | M1 - Arithmétique

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 Montrer qu'un corps de nombres de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ est de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ pour un unique $d \in \mathbb{Z}$ avec $d \neq 0, 1$ et sans facteur carré.

Exercice 2 Montrer que tout corps quadratique est inclus dans un corps cyclotomique.

Exercice 3 Soit p un nombre premier et soit $\alpha = \sqrt{-p}$.

1. Montrer que $\alpha\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } a \equiv 0 \bmod p\}$.
2. En déduire que α est un élément premier de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 4 Soit $k \in \mathbb{Z}$ négatif et sans facteur carré. Montrer que si $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ est à factorisation unique alors $k = -1$ ou $k = -2$.

Exercice 5 On travail dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

1. Montrer que $\sqrt{-5}$ et $1 + \sqrt{-5}$ admettent un ppcm et un pgcd.
2. Montrer que 2 et $1+\sqrt{-5}$ n'admettent pas de ppcm. On pourra remarquer qu'un tel ppcm m satisferait $12 \mid \mathrm{N}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}(m)$, puis qu'il serait associé à $2 + 2\sqrt{-5}$.
3. Monter que $3(1 + \sqrt{-5})$ et $3(1 - \sqrt{-5}) = (1 + \sqrt{-5})(-2 - \sqrt{-5})$ n'admettent pas de pgcd.

Exercice 6 On se propose de montrer que si $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ alors $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$. On pose $x = \sqrt[3]{2}$ et on fixe $z = a + bx + cx^2 \in K$, avec $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

1. Vérifier que si $z \notin \mathbb{Q}$ alors le polynôme minimal de z est $X^3 - 3aX^2 + 3(a^2 - 2bc)X - (a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc)$.

   On suppose dorénavant $z \in \mathcal{O}_K$.
2. En considérant $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^K(x^i z)$, montrer que $6b, 6c \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire que $3a, 3b, 3c \in \mathbb{Z}$. On pourra multiplier $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$ par $2 \cdot 3^3$ puis 3^3.

   On pose $\alpha = 3a$, $\beta = 3b$ et $\gamma = 3c$, de sorte que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.
4. Vérifier que $\alpha^2 \equiv 2\beta\gamma \bmod 3$, $\alpha - \beta + \gamma \equiv 0 \bmod 3$, puis que $\alpha \equiv \gamma \equiv -\beta \bmod 3$.
5. Vérifier que $\pm\frac{1}{3}(1 - x + x^2) \notin \mathcal{O}_K$ et conclure.

Exercice 7 Soit K un corps de nombres. Montrer que $\mathcal{O}_K^* = \{x \in \mathcal{O}_K \mid \mathrm{N}_{\mathbb{Q}}^K(x) = \pm 1\}$.

Exercice 8 Soit K un corps de nombres. On note $\mu(K) \subset \mathcal{O}_K^*$ l'ensemble des racines de l'unité appartenant à K et on pose $U(K) = \{z \in \mathcal{O}_K \mid |\sigma(z)| = 1 \, \forall \sigma \colon K \to \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $U(K)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^*$ contenant $\mu(K)$.
2. Montrer que $\{\chi_{z,K/\mathbb{Q}} \mid z \in U(K)\} \subset \mathbb{Q}[x]$ est un ensemble fini. (Ici $\chi_{z,K/\mathbb{Q}}$ est le polynôme minimal de z.)

3. En déduire que $U(K)$ est fini, puis que $U(K) = \mu(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}$ où $n = \mathrm{card}(U(K))$.
4. Montrer que $\varphi(n) \mid [K : \mathbb{Q}]$.
5. Montrer que si $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ a tous se conjugués de module 1 alors x est une racine de l'unité.

Exercice 9 Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est intégralement clos si et seulement si $\mathbb{Z}[\alpha]$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$.