Université Paris 7 - Denis Diderot 2018-2019
UFR de Mathématiques M1 - Arithmétique

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 1. Dans tous les cas la norme de x est donnée par $x\bar{x}$ où $\bar{x}$ est le conjugué (complexe ou au sens des quaternions). Donc x est inverible ssi $N(x) = 1$, puisque dans ce cas $\bar{x}$ est un inverse.

2. Voir section 4.2.b) page 28 de `https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal:110743`
3. Si $x = ab$ et $N(x) = p$ premier, alors $N(a) = 1$ ou $N(b) = 1$, et par la equestion précédente a ou b est inversible, donc x est irréductible.

Exercice 2 1. Immédiat

2. Si $p = 1 \mod 4$ alors -1 est un carré $\mod p$. DOnc il existe un entier a tels que p divise $a^2 + 1 = (a + i)(a - i)$. Or p ne divise pas $a \pm i$ mais divise leur produit, donc p n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$, donc pas irréductible. On peut donc écrire $p = xy$ avec x, y non inversible, et puisque la partie imaginaire de p est nulle on a forcément que x, y sont conjugués. Remarquons que x et y sont forcéments irréductibles !
3. Si p est un premier quei n'est pas irréductible, alors il existe $x = a + ib$ tel que $N(x) = a^2 + b^2 = p$. Or a^2 et b^2 sont forcéments égaux à 0 ou $1 \mod 4$, donc $p \neq 3 \mod 4$. Par contraposée, si $p = 3 \mod 4$, alors p est irréductible.
4. Puisque on est dans un anneau Euclidien, π est premier, donc l'idéeal I qu'il engendre est premier, donc son intersection avec $\mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$, donc engendré par un (unique) nombre premier p. Donc $p \in I$, ce qui implique $\pi \| p$.
5. Les irréductibles sont donc : les premiers impairs usuels égaus à $3 \mod 4$, les diviseurs non inversibles des premiers impairs usuels égaux à $1 \mod 4$, et les diviseurs de 2 qui sont $1 \pm i$. En particulier, un élément irréductible est de norme un premier, ou le carré d'un premier.

Exercice 3 Si $N(x) = p$ alors x est un diviseur strict de λp où λ est inversible. Ces diviseurs sont uniquement déterminés à multiplication par un inversible près, et en éliminant les doublons on arrive bien à 8.

Exercice 4 On peut déjà mettre un 3 en facteur, et puisque 3 est premier et égal à $3 \mod 4$ il est irréductible. $-1 + 5i$ est de norme $26 = 2 \times 13$ donc est réductible. puisque 2 apparait dans cette décomposition on peut même en déduire qu'il est divisble par $1 + i$. On fait la division euclidienne et on trouve la factorisation $(1 + i)(-2 + 3i)$. $-2 + 3i$ est de norme 13 qui est premier donc est irréductible.