Université Paris 7 - Denis Diderot | 2018-2019
UFR de Mathématiques | M1 - Arithmétique

Feuille d'exercices 4
SOMMES DE GAUSS

Exercice 1 Soit $0 \leq i \leq p-1$. Montrer que la somme

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{a}{p}\right) a^i$$

vaut 0 si $i \neq \frac{p-1}{2}$ et $p-1$ sinon.

Exercice 2 Soit G la somme de Gauss relative à p, c'est-à-dire

$$G = \sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^a,$$

où $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$. Montrer l'identité

$$G = \sum_{a=0}^{p-1} \zeta^{a^2}.$$

Exercice 3 Le signe de la somme de Gauss, d'après Dirichlet. On sait que $G = \pm\sqrt{p}$ si $p \equiv 1 \bmod 4$ et que $G = \pm i\sqrt{p}$ si $p \equiv 3 \bmod 4$. On se propose ici de déterminer le signe. Il s'agit d'un problème assez difficile, même pour Gauss :

> ≪Finalement, il y a deux jours, j'ai réussi, non à cause de mes pénibles efforts, mais par la grâce de Dieu. Comme un éclair subit, l'énigme se trouva résolue. Je ne puis dire moi-même de quelle nature a été le fil conducteur reliant ce que je savais déjà à ce qui a rendu mon succès possible.≫

Soient $N \geq 1$ et

$$G_N = \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i a^2}{N}}.$$

1. Soient $a < b$ deux entiers et $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_a^b f(t) e^{2\pi i n t}\, \mathrm{d}t.$$

2. Montrer $G_N = (1+i^{-N})N^{\frac{1}{2}} I$ où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t^2}\, \mathrm{d}t$.
3. En déduire $I = \frac{1+i}{2}$ et

$$G_N = \begin{cases} (1+i)N^{\frac{1}{2}} & \text{si } N \equiv 0 \bmod 4, \\ N^{\frac{1}{2}} & \text{si } N \equiv 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{si } N \equiv 2 \bmod 4, \\ iN^{\frac{1}{2}} & \text{si } N \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Exercice 4 Pour $n \geqslant 1$ impair et $a \in \mathbb{Z}$, on définit $\tau_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) e^{\frac{2i\pi ak}{n}}$. Montrer la relation $\tau_{mn}(1) = \tau_m(v)\tau_n(u)$, où $um + vn = 1$.

Exercice 5 Soit $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère primitif et $a \in \mathbb{Z}$ pas premier avec n. Montrer que

$$G(\chi, a) = 0$$

et donc la formule $G(\chi, a) = \bar{\chi}(a)G(\chi, 1)$ est valable pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 Soit $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère. Montrer que

$$\sum_{a=0}^{n-1} \sum_{\substack{x,y \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ x \neq y}} \chi(x)\bar{\chi}(y) e^{\frac{2\pi i a(x-y)}{n}} = 0.$$

Exercice 7 Soit $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère non trivial. Montrer que

$$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \chi(x) = 0.$$

Exercice 8 Soit $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère primitif et soit $a \in \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$. Alors

$$|G(\chi, a)|^2 = n.$$